

# MMP in 600 Formeln

Schweizer Institut für theoretische Analysis  
Version 6.0.0

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>4</b>
1.1	Flächenfunktionen . . . . .	4
1.2	Integrationsregeln . . . . .	5
1.3	Bestimmte Integrale . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>7</b>
2.1	Ableitungen . . . . .	7
2.2	Ableitungsregeln . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>8</b>
3.1	Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	8
3.2	Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	9
3.3	Lineare in-/homogene Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten . . . . .	9
3.4	Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>10</b>
4.1	Komplexe Zahlenebene . . . . .	10
4.2	Cauchy-Riemann-Differentialgleichung . . . . .	10
4.3	Komplexe Wegintegrale . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Residuensätze</b>	<b>11</b>
5.1	Cauchy-Integrale . . . . .	11
5.2	Gebrochenrationale Integrale . . . . .	11
5.3	Sinus/Kosinus Integrale . . . . .	11
5.4	Eliassatz . . . . .	11
5.5	Kramers-Kronig-Beziehungen . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Grenzwertuntersuchungen</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Nullstellen finden</b>	<b>12</b>
7.1	pq-Formel . . . . .	12
7.2	Mitternachtsformel . . . . .	12
7.3	Formeln von Cardano . . . . .	13
<b>8</b>	<b>Funktionen und Relationen</b>	<b>14</b>
8.1	Trigonometrische Funktionen . . . . .	14
8.1.1	Additionstheoreme . . . . .	15

8.1.2	Bestimmte trigonometrische Integrale . . . . .	15
8.1.3	$\mathfrak{J}$ -Funktion . . . . .	15
8.1.4	Verkettung von trigonometrischen und Arkusfunktionen . . . . .	16
8.2	Hyperbelfunktionen . . . . .	17
8.2.1	Additionstheoreme . . . . .	18
8.2.2	Verkettung von Hyperbel- und Areafunktionen . . . . .	18
8.3	Die Deltafunktion . . . . .	19
8.4	Kronecker-Delta . . . . .	19
8.5	Greensfunktionen . . . . .	19
8.6	Gammafunktion und Fakultät . . . . .	20
8.7	Fehlerfunktion . . . . .	20
8.8	Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	21
8.9	Binomialkoeffizient . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Taylorreihe</b>	<b>21</b>
9.1	Taylorreihen wichtiger Funktionen . . . . .	22
9.2	Binomische Reihe . . . . .	23
<b>10</b>	<b>Summenformeln</b>	<b>23</b>
<b>11</b>	<b>Differentialoperatoren</b>	<b>24</b>
<b>12</b>	<b>Koordinatensysteme</b>	<b>25</b>
12.1	Jacobian: . . . . .	25
12.2	Polarkoordinaten . . . . .	25
12.3	Ellipsenkoordinaten . . . . .	26
12.4	Zylinderkoordinaten . . . . .	27
12.5	Kugelkoordinaten . . . . .	28
12.6	Ellipsoidkoordinaten . . . . .	29
12.6.1	mit konstantem Radius . . . . .	29
12.6.2	mit Radiusfunktion . . . . .	29
<b>13</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>30</b>
13.1	Antikommutative Graßmann-Identität . . . . .	30
13.2	Volumenintegrale . . . . .	30
13.3	Oberflächenintegrale . . . . .	30
13.4	Linienintegrale . . . . .	30
13.5	Mehrdimensionale Differentialrechnung . . . . .	31
13.6	Gauß'scher Integralsatz . . . . .	31
13.7	Integralsatz von Stokes . . . . .	31
13.8	Mehrdimensionale partielle Integration . . . . .	31
13.9	Gradientenfeld . . . . .	31
<b>14</b>	<b>Fourier</b>	<b>32</b>
14.1	Fourierreihen . . . . .	32
14.2	Fouriertransformation . . . . .	33
14.3	Allgemeine Regeln . . . . .	33
14.4	Fouriertransformation in 3D . . . . .	34
<b>15</b>	<b>Variationsrechnung</b>	<b>35</b>
15.1	Funktionalrechnung . . . . .	35

15.2 Lagrangeformalismus . . . . .	35
15.3 Hamiltonformalismus . . . . .	35
<b>16 Symmetrien und Erhaltungsgrößen</b>	<b>35</b>
<b>17 Stochastik</b>	<b>36</b>
17.1 Verteilungsfunktionen . . . . .	36
17.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	36
<b>18 Funktionenklassen</b>	<b>37</b>
18.1 Legendrepolynome . . . . .	37
18.2 Kugelflächenfunktionen . . . . .	37
18.3 Radialfunktionen . . . . .	38
18.4 Hermite-Polynome . . . . .	39
<b>19 Geometrie im Dreieck</b>	<b>39</b>
<b>20 Tensoren</b>	<b>40</b>
20.1 Kronecker-Tensor . . . . .	40
20.2 Levi-Civita-Tensor . . . . .	40
20.3 Rechenregeln . . . . .	40
20.4 Operationen in Einstein'scher Summenkonvention . . . . .	41
20.5 Inverse Matrix . . . . .	41
20.6 Orthogonale Matrizen . . . . .	41
20.7 Rechenregeln zur Determinante . . . . .	41
<b>21 Quantenmechanik</b>	<b>42</b>
21.1 Operatoridentitäten . . . . .	42
21.2 Spezielle Operatoren . . . . .	42
21.3 Harmonischer Oszillator . . . . .	43
21.3.1 Eindimensional . . . . .	43
21.3.2 Mehrdimensional . . . . .	44
21.4 Bahndrehimpulsoperator . . . . .	44
21.5 Wichtige Kommutatoren . . . . .	44
21.6 Basiszerlegung . . . . .	44

# 1 Integralrechnung

## 1.1 Flächenfunktionen

$$f(x) = x^v \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{x^{v+1}}{v+1} \quad (1)$$

$$f(x) = v^x \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{v^x}{\ln(v)} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(x) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot (\ln(x) - 1) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln|x| \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot (\ln|x| - 1) \quad (4)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \mapsto \quad F(x) = -\cos(x) \quad (5)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \mapsto \quad F(x) = \sin(x) \quad (6)$$

$$f(x) = \tan(x) \quad \mapsto \quad F(x) = -\ln|\cos(x)| \quad (7)$$

$$f(x) = \sinh(x) \quad \mapsto \quad F(x) = \cosh(x) \quad (8)$$

$$f(x) = \cosh(x) \quad \mapsto \quad F(x) = \sinh(x) \quad (9)$$

$$f(x) = \tanh(x) \quad \mapsto \quad F(x) = \ln(\cosh(x)) \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{1}{a+bx} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{\ln|a+bx|}{b} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}^3} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}^3} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2-x^2}} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{a^2-x^2} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \mapsto \quad F(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \mapsto \quad F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (17)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2+x^2} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{2} \left( x \cdot \sqrt{a^2+x^2} + a^2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \right) \quad (18)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2-x^2} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{2} \left( x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \quad (19)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2-b^2-x^2} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{2} \left( x \cdot \sqrt{a^2-b^2-x^2} + (a^2-b^2) \cdot \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) \right) \quad (20)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2+x^2}^3 \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{8} \cdot \left( 3a^4 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + (5a^2x+2x^3) \cdot \sqrt{a^2+x^2} \right) \quad (21)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}^3 \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{1}{8} \cdot \left( 3a^4 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + (5a^2x-2x^3) \cdot \sqrt{a^2-x^2} \right) \quad (22)$$

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{a}x)}{2\sqrt{a}} \quad (23)$$

$$f(x) = \theta(x) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \theta(x) \quad (24)$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad \mapsto \quad F(x) = |x| \quad (25)$$

$$f(x) = |x| \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{x \cdot |x|}{2} \quad (26)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = 2 \cdot \operatorname{artanh}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad (28)$$

$$f(x) = \frac{1}{\tan(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = \ln |\sin(x)| \quad (29)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = \ln \left| \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right| \quad (30)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = 2 \cdot \arctan\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad (31)$$

$$f(x) = \frac{1}{\tanh(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = \ln |\sinh(x)| \quad (32)$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \operatorname{sgn}(a) \quad (33)$$

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \operatorname{sgn}(a) \quad (34)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a \cdot \ln(a^2 + x^2)}{2} \quad (35)$$

$$f(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \operatorname{sgn}(a) \quad (36)$$

$$f(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot \operatorname{sgn}(a) \quad (37)$$

$$f(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \mapsto \quad F(x) = x \cdot \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a \cdot \ln|x^2 - a^2|}{2} \quad (38)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + b} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}}\right) \quad (39)$$

$$f(x) = \frac{x + c}{x^2 + ax + b} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{2c - a}{\sqrt{4b - a^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + ax + b) \quad (40)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + ax + b} \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{a^2 - 2b}{\sqrt{4b - a^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}}\right) - \frac{a}{2} \cdot \ln(x^2 + ax + b) + x \quad (41)$$

$$f(x) = x^n \cdot \sin(ax) \quad \mapsto \quad F(x) = - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} \cdot \cos\left(ax + \frac{k\pi}{2}\right) \quad (42)$$

## 1.2 Integrationsregeln

Allgemeine Regeln:

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \mapsto \quad F(x) = \ln|g(x)| \quad (43)$$

$$f(x) = g(ax + b) \quad \mapsto \quad F(x) = \frac{G(ax + b)}{a} \quad (44)$$

Riemann Integral:

$$\mathcal{S}_a^b(f(x), n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) \quad \text{mit: } a \leq \xi_{i-1} \leq x_i \leq \xi_i \leq b \quad (45)$$

Summen-Integral-Transformation:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_a^b(f(x), n) \stackrel{\text{z.B.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \Delta x \cdot i) \cdot \Delta x \quad \text{mit: } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (46)$$

Kontinuumsmlimes:

$$1\text{D: } \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{F}} = \int_{\mathbb{F}} \frac{dk}{2\pi} \qquad 3\text{D: } \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{k \in \mathbb{F}^3} = \int_{\mathbb{F}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (47)$$

Partielle Integration:

$$\text{Bestimmt: } \int_a^b dx f'(x) \cdot g(x) = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b dx f(x) \cdot g'(x) \quad (48)$$

$$\text{Unbestimmt: } \int dx f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int dx f(x) \cdot g'(x) \quad (49)$$

Integration durch Substitution:

$$\text{Bestimmt: } \int_a^b dx f(g(x)) \cdot g'(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} dt f(t) \quad \text{Keine Rücksubstitution!!!} \quad (50)$$

$$\text{Unbestimmt: } \int dx f(g(x)) \cdot g'(x) = \int dt f(t) \quad \text{Rücksubstitution nicht vergessen!!!} \quad (51)$$

### 1.3 Bestimmte Integrale

Schweizer Loopintegration ( $\text{Re}(a) > 0$  und  $b \in \mathbb{C}$ , Beweis mittels Baseler Integralsatz):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \cdot e^{-bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x \cdot e^{-ax^2} \cdot e^{-bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \cdot \frac{-b}{2} \cdot e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \cdot e^{-ax^2} \cdot e^{-bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} \cdot \frac{2a + b^2}{4} \cdot e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (54)$$

Zeta-Poisson-Integrale ( $\text{Re}(a) > 0$ ):

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^2}{6a^2} \qquad \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^4}{15a^4} \qquad \int_0^{\infty} dx \frac{x^5}{e^{ax} - 1} = \frac{8\pi^6}{63a^6} \quad (55)$$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^{ax} + 1} = \frac{\pi^2}{12a^2} \qquad \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^{ax} + 1} = \frac{7\pi^4}{120a^4} \qquad \int_0^{\infty} dx \frac{x^5}{e^{ax} + 1} = \frac{31\pi^6}{252a^6} \quad (56)$$

Andere Integrale ( $a, b \in \mathbb{R}$ ):

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{1+x^b} = \frac{\pi}{b \cdot \sin(\frac{a\pi}{b})} \quad \text{für } 0 < a < b \qquad \int_0^{\infty} dx x^n \cdot e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a > 0 \quad (57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iax}}{b^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-|a|b}}{b} \quad \text{für } b > 0 \qquad \int_0^{\infty} dx \frac{\sin(ax)}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad (58)$$

## 2 Differentialrechnung

### 2.1 Ableitungen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (59)$$

$$f(x) = c \quad \mapsto \quad f'(x) = 0 \quad (60)$$

$$f(x) = x^v \quad \mapsto \quad f'(x) = vx^{v-1} \quad (61)$$

$$f(x) = e^x \quad \mapsto \quad f'(x) = e^x \quad (62)$$

$$f(x) = v^x \quad \mapsto \quad f'(x) = \ln(v) \cdot v^x \quad (63)$$

$$f(x) = \ln(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (64)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \cos(x) \quad (65)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = -\sin(x) \quad (66)$$

$$f(x) = \tan(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2} \quad (67)$$

$$f(x) = \sinh(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \cosh(x) \quad (68)$$

$$f(x) = \cosh(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \sinh(x) \quad (69)$$

$$f(x) = \tanh(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2} \quad (70)$$

$$f(x) = \arcsin(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (71)$$

$$f(x) = \arccos(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (72)$$

$$f(x) = \arctan(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (73)$$

$$f(x) = \operatorname{arsinh}(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (74)$$

$$f(x) = \operatorname{arcosh}(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (75)$$

$$f(x) = \operatorname{artanh}(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (76)$$

$$f(x) = \operatorname{erf}(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (77)$$

$$f(x) = |x| \quad \mapsto \quad f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (78)$$

$$f(x) = \theta(x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \delta(x) \quad (79)$$

### 2.2 Ableitungsregeln

Allgemeine Regeln:

$$f(x) = u(v(x)) \quad \mapsto \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad (80)$$

$$f(u(x), v(x)) = u \cdot v \quad \mapsto \quad f'(u(x), v(x)) = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (81)$$

$$f(u(x), v(x)) = \frac{u}{v} \quad \mapsto \quad f'(u(x), v(x)) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (82)$$

$$f(x) = \sqrt[n]{u(x)} \quad \mapsto \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}} \quad (83)$$

Umkehrregel:

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \quad (84)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (85)$$

Integralregeln:

$$f(x) = \int_a^x dt g(t) \quad \mapsto \quad f'(x) = g(x) \quad (86)$$

$$f(x) = \int_x^b dt g(t) \quad \mapsto \quad f'(x) = -g(x) \quad (87)$$

$$f(x) = \int_a^b dt g(t, x) \quad \mapsto \quad f'(x) = \int_a^b dt \partial_x g(t, x) \quad (88)$$

Die totale Ableitung:

$$f'(v(x), w(x), x) = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} \quad (89)$$

### 3 Differentialgleichungen

#### 3.1 Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Allgemeiner Ansatz für die Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist:

$$y(x) = A_1 \cdot e^{ax} \quad (90)$$

Bei einer  $n$ -fachen Nullstelle in  $a$  sind auch

$$A_1 \cdot e^{ax}, A_2 \cdot x e^{ax}, \dots, A_n \cdot x^{n-1} e^{ax} \quad (91)$$

Lösungen der homogenen Differentialgleichungen.

Spezialfälle bei denen eine Lösung direkt angegeben werden kann:

$$y''(x) - a^2 \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = A_1 \cdot \sinh(ax) + A_2 \cdot \cosh(ax) \\ y(x) = B_1 \cdot e^{ax} + B_2 \cdot e^{-ax} \\ y(x) = \begin{cases} C_1 \cdot \sinh(ax + C_2) & \text{für } |A_1| > |A_2| \\ C_1 \cdot \cosh(ax + C_2) & \text{für } |A_1| < |A_2| \\ A_2 \cdot e^{ax} & \text{für } A_1 = A_2 \\ A_2 \cdot e^{-ax} & \text{für } A_1 = -A_2 \end{cases} \end{cases} \quad (92)$$

$$y''(x) + a^2 \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = A_1 \cdot \sin(ax) + A_2 \cdot \cos(ax) \\ y(x) = B_1 \cdot e^{iax} + B_2 \cdot e^{-iax} \\ y(x) = C_1 \cdot \sin(ax + C_2) \\ y(x) = D_1 \cdot \cos(ax + D_2) \end{cases} \quad (93)$$



### 3.2 Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Hier wird zuerst die allgemeine homogene Lösung (also ohne Treiber) bestimmt. Anschließend wird eine einzelne Partikulärlösung gesucht. Hierzu wird in Abhängigkeit des Treibers ein spezieller Ansatz gewählt:

Treiber	Ansatz
$C \cdot e^{ax}$	$y_p(x) = A_1 \cdot e^{ax}$
$C \cdot \sinh(ax + b)$ oder $C \cdot \cosh(ax + b)$	$y_p(x) = A_1 \cdot \sinh(ax + b) + A_2 \cdot \cosh(ax + b)$
$C \cdot \sin(ax + b)$ oder $C \cdot \cos(ax + b)$	$y_p(x) = A_1 \cdot \sin(ax + b) + A_2 \cdot \cos(ax + b)$
Polynom vom Grad $n$	$y_p(x)$ ist ebenfalls ein Polynom vom Grad $n$

Ist der aus der Tabelle entnommene Ansatz bereits Teil der homogenen Lösung  $y_h(x)$ , so muss dieser (gegebenenfalls mehrmals) mit  $x$  multipliziert werden um den passenden Ansatz für die Partikulärlösung  $y_p(x)$  zu erhalten (vergleiche Gleichung (91)).

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 y''(x) + a^2 \cdot y(x) &= 2 \sin(ax) & \Rightarrow y_h(x) &= C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax) \\
 & & \Rightarrow y_p(x) &= A_1 \cdot x \sin(ax) + A_2 \cdot x \cos(ax)
 \end{aligned} \tag{94}$$

Die Konstanten  $A_i$  werden entsprechend bestimmt. Die Gesamtlösung ergibt sich aus der Addition der allgemeinen homogenen Lösung und der Partikulärlösung.

Ist der Treiber ein Produkt von Funktionen, für die bereits Ansätze bekannt sind, so ist der Ansatz für den gesamten Treibers ein Produkt der einzelnen Ansätze:

$$\text{Treiber} = \text{Treiber1} \cdot \text{Treiber2} \quad \Rightarrow \quad \text{Ansatz} = \text{Ansatz-für-Treiber1} \cdot \text{Ansatz-für-Treiber2} \tag{95}$$

Ist der Treiber eine Summe von Funktionen für die bereits Ansätze bekannt sind, kann für jeden Summand eine einzelne Partikulärlösung bestimmt werden. Die Partikulärlösung für den gesamten Treiber, ist dann die Summe der einzelnen Partikulärlösungen.

### 3.3 Lineare in-/homogene Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

Die Lösung einer Differentialgleichung der Form  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x)$  mit Randbedingung  $y(x_0) = y_0$  ist:

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left( y_0 \cdot e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^x du b(u) \cdot e^{A(u)} \right) \tag{96}$$

Bei höheren Ordnungen ist es nicht immer möglich eine Lösung zu finden. Für einige Fälle existieren jedoch Lösungen:

$$ax^2 \cdot y''(x) + bx \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = A_{1/2} \cdot x^{v_{1/2}} \\ \text{Falls der Ansatz } v = v_1 = v_2 \text{ liefert, gilt:} \\ y(x) = A_1 \cdot x^v + A_2 \cdot \ln(x) \cdot x^v \end{cases} \tag{97}$$

$$(1 - x^2)y''(x) - 2x \cdot y'(x) + 2y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = A_1 \cdot x + A_2 \cdot (x \cdot \operatorname{artanh}(x) - 1) \tag{98}$$

Bei Polynomen von  $n$ -ter Ordnung als Treiber, kann als Ansatz ein Polynom genommen werden, dessen Grad so gewählt ist, dass Einsetzen und anschließendes Ableiten des Ansatzes ein Polynom ergibt welches ebenfalls von  $n$ -ter Ordnung ist. Mit diesem Ansatz ist es jedoch nicht immer mögliche alle oder überhaupt eine Lösung zu finden.

### 3.4 Nichtlineare Differentialgleichungen

$$a \cdot y'(x) = 1 + y(x)^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tan\left(\frac{x}{a} + A_1\right) \quad (99)$$

$$a \cdot y'(x) = 1 - y(x)^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tanh\left(\frac{x}{a} + A_1\right) \quad (100)$$

$$y'(x) = a \cdot \sqrt{1 + y(x)^2} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sinh(ax + A_1) \quad (101)$$

$$y''(x) = a \cdot e^{b \cdot y(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \begin{cases} \frac{-2}{b} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{ab}{2}} \cdot (A_1 + x)\right) & \text{für } y'(\infty) = 0 \\ \frac{1}{b} \cdot \ln\left(\frac{bA_2^2}{2a} \left(\tanh\left(\frac{bA_2}{2} \cdot (A_1 + x)\right)^2 - 1\right)\right) & \text{für } y'(\infty) \neq 0 \end{cases} \quad (102)$$

$$y''(x) = -\frac{\alpha}{y(x)^n} \quad \Rightarrow \quad y(x) = A_1 \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha \cdot (n+1)^2}{2A_1^{n+1} \cdot (n-1)}} \cdot x + A_2\right)^{\frac{2}{n+1}} \quad (103)$$

Bernoulli'sche Differentialgleichung:

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x) \cdot y(x)^\nu \quad \Rightarrow \quad \text{Substitution: } z(x) = y(x)^{1-\nu} \quad (104)$$

## 4 Komplexe Zahlen

### 4.1 Komplexe Zahlenebene

$$z = a + bi = re^{i\phi} \quad \text{mit: } a, b \in \mathbb{R} \quad r \in \mathbb{R}_0^+ \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (105)$$

Umrechnung in Polarform:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (106)$$

$\phi = \arg(z)$	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$b > 0$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
$b = 0$	$\pi$	$0$	$0$
$b < 0$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

Umrechnung in kartesische Form:

$$a = r \cdot \cos(\phi) \quad b = r \cdot \sin(\phi) \quad (107)$$

Komplexe Wurzel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i \cdot \arg(z) + 2\pi ik}{n}} \quad \text{mit: } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (108)$$

Komplexer Logarithmus:

$$\ln(z) = \ln|z| + i \cdot (\arg(z) + 2\pi k) \quad \text{mit: } k \in \mathbb{Z} \quad (109)$$

### 4.2 Cauchy-Riemann-Differentialgleichung

An den Punkten an denen eine Funktion komplex differenzierbar ist erfüllt sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung:

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{d}{dx} f(x + iy) = -i \frac{d}{dy} f(x + iy) \quad (110)$$

In anderer Form, getrennt nach Real- und Imaginärteil:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Re}(f(x + iy)) = \frac{d}{dy} \operatorname{Im}(f(x + iy)) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dy} \operatorname{Re}(f(x + iy)) = -\frac{d}{dx} \operatorname{Im}(f(x + iy)) \quad (111)$$

### 4.3 Komplexe Wegintegrale

Das Wegintegral der Funktion  $f(z)$  entlang der Kurve  $z(t)$  in der komplexen Ebene ist gegeben durch:

$$I = \int_C dz f(z) = \int_a^b dt \left( \frac{d}{dt} z(t) \right) \cdot f(z(t)) \quad (112)$$

Alternativ kann auch klassisch mit der Stammfunktion integriert werden sofern diese existiert.

## 5 Residuensätze

### 5.1 Cauchy-Integrale

- ▷  $f(z)$  muss auf der durch das Integral eingeschlossenen Fläche holomorph sein.
- ▷  $z_0$  muss in der vom Integral eingeschlossenen Fläche liegen.

$$\oint dz \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0) \quad (113)$$

$$\oint dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z) \right|_{z=z_0} \quad (114)$$

### 5.2 Gebrochenrationale Integrale

- ▷  $p(x)$  und  $q(x)$  sind reelle Polynome wobei der Grad von  $q(x)$  um mindestens zwei größer als der von  $p(x)$  sein muss.
- ▷ Der Grad von  $q(x)$  darf nicht unendlich sein.
- ▷  $x_0$  bis  $x_N$  sind die komplexen Nullstellen von  $q(x)$  mit  $\text{Im}(x) \geq 0$ . Diese müssen alle einfach sein. Bei einer reellen Nullstelle muss das Ergebnis für diese Nullstelle noch durch 2 geteilt werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{p(x)}{q(x)} = \left. \frac{2\pi i \cdot p(x)}{\frac{d}{dx} q(x)} \right|_{x=x_0 \dots x_N} \quad (115)$$

### 5.3 Sinus/Kosinus Integrale

- ▷ Integralformeln funktionieren nur wenn das Integral wirklich existiert.
- ▷ Der Integrand muss achsensymmetrisch sein.
- ▷  $p(x)$  und  $q(x)$  sind reelle Polynome wobei der Grad von  $q(x)$  größer als der von  $p(x)$  sein muss.
- ▷ Der Grad von  $q(x)$  darf nicht unendlich sein.
- ▷  $x_0$  bis  $x_N$  sind die komplexen Nullstellen von  $q(x)$  mit  $\text{Im}(x) \geq 0$ . Diese müssen alle einfach sein. Bei einer reellen Nullstelle muss das Ergebnis für diese Nullstelle noch durch 2 geteilt werden.
- ▷  $a \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{p(x) \cdot \cos(ax)}{q(x)} = \left. \frac{\pi i \cdot p(x) \cdot e^{iax}}{\frac{d}{dx} q(x)} \right|_{x=x_0 \dots x_N} \quad (116)$$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{p(x) \cdot \sin(ax)}{q(x)} = \left. \frac{\pi \cdot p(x) \cdot e^{iax}}{\frac{d}{dx} q(x)} \right|_{x=x_0 \dots x_N} \quad (117)$$

### 5.4 Eliassatz

- ▷  $a, r \in \mathbb{C}$
- ▷  $f(z)$  muss holomorph in (und auf) dem Kreis  $a + r \cdot e^{ix}$  sein.

$$\int_{\Delta=2\pi} dx f(a + r \cdot e^{\pm ix}) = 2\pi \cdot f(a) \quad (118)$$

## 5.5 Kramers-Kronig-Beziehungen

▷  $f(\omega)$  darf keine Polstelle auf der reellen Achse oder der oberen komplexen Halbebene haben.

▷  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$  solange  $\text{Im}(\omega) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} = i\pi \cdot f(\omega) \quad (119)$$

In anderer Form, getrennt nach Real- und Imaginärteil:

$$\text{Re}(f(\omega)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im}(f(\omega'))}{\omega' - \omega} \quad \text{und} \quad \text{Im}(f(\omega)) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re}(f(\omega'))}{\omega' - \omega} \quad (120)$$

▷ Ist  $f(\omega)$  die Fouriertransformierte einer reeller Funktion gilt:  $f(\omega) = f(-\omega)^*$  und somit:

$$\text{Re}(f(\omega)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \cdot \text{Im}(f(\omega'))}{\omega'^2 - \omega^2} \quad \text{und} \quad \text{Im}(f(\omega)) = \frac{-2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re}(f(\omega'))}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (121)$$

## 6 Grenzwertuntersuchungen

Die Regel von l'Hospital, ist zu verwenden falls sich  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  bei Einsetzen des Grenzwerts ergibt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (122)$$

Wenn der rechtsseitige Grenzwert ungleich dem Linksseitigem ist, muss angegeben werden ob man von der Linken oder rechten Seite gegen  $x_0$  geht. Man kennzeichnet den linksseitigen Grenzwert mit  $-$  den Rechtsseitigen mit  $+$  :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (123)$$

Der ungekennzeichnete Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ist dann nicht definiert, selbst wenn  $f(x_0)$  definiert ist.

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \quad (124)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x!} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[x]{x!}} = e \quad (125)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a/x)^x = e^a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[x]{a} - 1) = \ln(a) \quad \text{falls } a > 0 \quad (126)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \binom{a}{x} = 0 \quad \text{falls } a > -1 \quad (127)$$

Divergenzgeschwindigkeit ansteigend von links nach rechts:

$$\ln(x) \rightarrow \sqrt[k]{x} \rightarrow x \rightarrow x^k \rightarrow k^x \rightarrow x! \rightarrow x^x \quad k > 1 \quad (128)$$

## 7 Nullstellen finden

### 7.1 pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad x^2 + px + q = 0 \quad (129)$$

### 7.2 Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (130)$$

### 7.3 Formeln von Cardano

Die Formeln von Cardano können verwendet werden um kubische Gleichungen folgender Form zu lösen:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (131)$$

Als erstes muss die Substitution  $x = z - \frac{a}{3}$  durchgeführt werden. Die Gleichung vereinfacht sich dann auf:

$$z^3 + pz + q = 0 \quad \text{mit: } \begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} \\ q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \end{aligned} \quad (132)$$

Die Gleichung kann nun für den Fall  $p = 0$  oder  $q = 0$  leicht gelöst werden.

Ist  $p \neq 0$  und  $q \neq 0$  muss als nächstes die Diskriminante  $\mathfrak{D}$  berechnet werden um die Anzahl der Lösungen zu bestimmen:

$$\mathfrak{D} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (133)$$

Abhängig von dem Wert von  $\mathfrak{D}$  gibt es verschiedene Fälle:

1.  $\mathfrak{D} > 0$

In diesem Fall gibt es nur eine Lösung:

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}}} \quad (134)$$

Bei den hier auftretenden dritten Wurzeln ist jeweils die reelle Lösung zu wählen. Das Vorzeichen eines negativen Arguments innerhalb der Wurzel kann herausgezogen werden um so das Argument der Wurzel positiv zu machen.

2.  $\mathfrak{D} = 0$

In diesem Fall erhält man zwei Lösungen (eine davon ist doppelt):

$$z_1 = \frac{3q}{p} \quad z_{2,3} = -\frac{3q}{2p} \quad (135)$$

3.  $\mathfrak{D} < 0$

In diesem Fall gibt es drei Lösungen:

$$z_1 = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right)\right) \quad (136)$$

$$z_2 = -\sqrt{-\frac{4p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) + \frac{\pi}{3}\right) \quad (137)$$

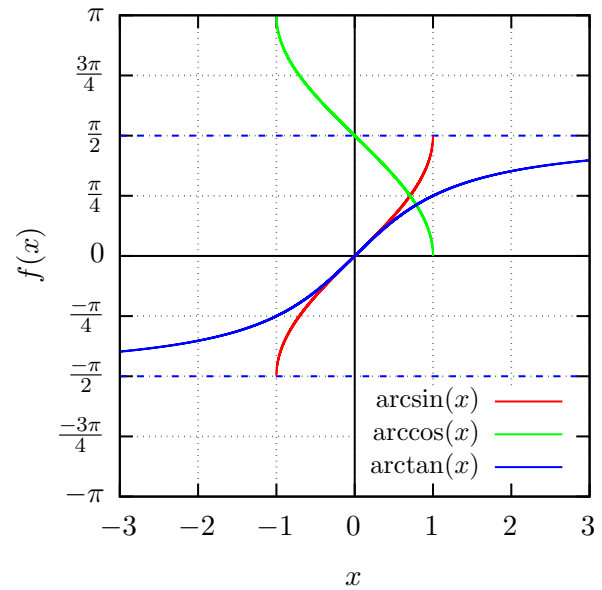
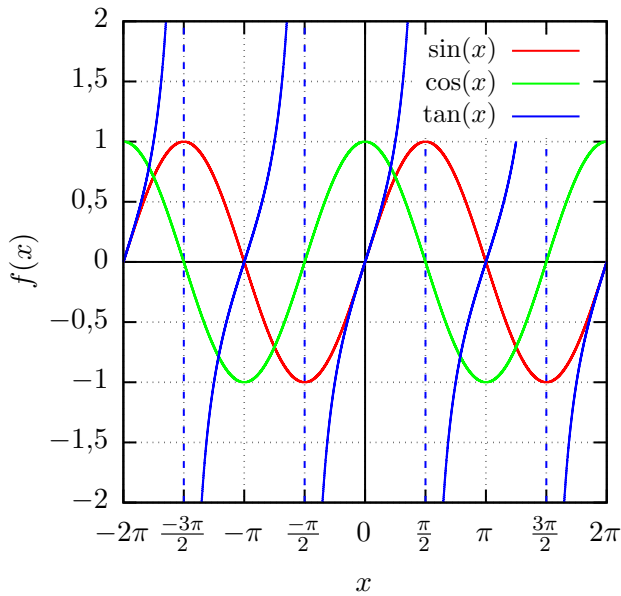
$$z_3 = -\sqrt{-\frac{4p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right) \quad (138)$$

$x_1$  bis  $x_3$  kann nun durch Rücksubstitution mittels  $x = z - \frac{a}{3}$  bestimmt werden.

Es existiert auch ein geschlossenes Lösungsverfahren für Gleichungen vierten Grades. Die zu lösende quartische Gleichungen kann hierbei auf die Lösung einer kubischen Gleichung reduziert werden. Es ist jedoch der mit dem Grad des Polynoms exponentiell ansteigende Schwierigkeitsgrad zu beachten. Das obige Verfahren muss mit komplexen Zahlen durchgeführt werden. Aus diesem Grund ist dringend von diesem Lösungsverfahren abzuraten. Es sollte nur im äußersten Notfall durchgeführt werden, beispielsweise wenn ein Dietrichsches Problem vorliegt das invariant unter Büchlertransformation ist.

# 8 Funktionen und Relationen

## 8.1 Trigonometrische Funktionen



$$\sin(x) = \frac{i \cdot (e^{-ix} - e^{ix})}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (139)$$

$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (140)$$

$$\cos(x) = \frac{(e^{-ix} + e^{ix})}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (141)$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (142)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{i \cdot (e^{-ix} - e^{ix})}{e^{-ix} + e^{ix}} \quad (143)$$

$$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2} \quad (144)$$

$$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (145)$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \quad (146)$$

$$\sin(x)^3 = \frac{3 \cdot \sin(x) - \sin(3x)}{4} \quad (147)$$

$$\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \quad (148)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \quad (149)$$

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad (150)$$

$$\sin(x) = \frac{2 \cdot \tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)^2} \quad (151)$$

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan(x/2)^2}{1 + \tan(x/2)^2} \quad (152)$$

$$\tan(x) = \frac{2 \cdot \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)^2} \quad (153)$$

### 8.1.1 Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \quad (154)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \quad (155)$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} \quad (156)$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{\sin(x - y) + \sin(x + y)}{2} \quad (157)$$

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2} \quad (158)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (159)$$

$$\sin(x) + \cos(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (160)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (161)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (162)$$

$$\sin(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (163)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (164)$$

### 8.1.2 Bestimmte trigonometrische Integrale

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(kx) \cdot \sin(lx) = 0 \quad \text{falls } k, l \in \mathbb{N}_0 \quad (165)$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(kx) \cdot \cos(lx) = 0 \quad \text{falls } k, l \in \mathbb{N}_0 \text{ und } k \neq l \quad (166)$$

$$\int_0^{2\pi} dx \sin(kx) \cdot \sin(lx) = 0 \quad \text{falls } k, l \in \mathbb{N}_0 \text{ und } k \neq l \quad (167)$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(kx)^2 = \pi \quad \text{falls } k \in \mathbb{N} \quad (168)$$

$$\int_0^{2\pi} dx \sin(kx)^2 = \pi \quad \text{falls } k \in \mathbb{N} \quad (169)$$

### 8.1.3 $\mathfrak{J}$ -Funktion

$$\mathfrak{J}_n(y) = \frac{1}{y} \int_0^1 dx x^n \cdot \sin(xy) = - \left[ \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^{n-k}}{y^{k+2}} \cdot \cos\left(xy + \frac{k\pi}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=1} \quad (170)$$

### 8.1.4 Verkettung von trigonometrischen und Arkusfunktionen

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad (171)$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (172)$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad (173)$$

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (174)$$

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (175)$$

$$\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (176)$$

$$\sin(\arcsin(x) \pm \arcsin(y)) = x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} \quad (177)$$

$$\sin(\arcsin(x) \pm \arccos(y)) = xy \pm \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \quad (178)$$

$$\sin(\arcsin(x) \pm \arctan(y)) = \frac{x \pm y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}} \quad (179)$$

$$\sin(\arccos(x) \pm \arccos(y)) = y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2} \quad (180)$$

$$\sin(\arccos(x) \pm \arctan(y)) = \frac{\sqrt{1-x^2} \pm xy}{\sqrt{1+y^2}} \quad (181)$$

$$\sin(\arctan(x) \pm \arctan(y)) = \frac{x \pm y}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} \quad (182)$$

$$\cos(\arcsin(x) \pm \arcsin(y)) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \mp xy \quad (183)$$

$$\cos(\arcsin(x) \pm \arccos(y)) = y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2} \quad (184)$$

$$\cos(\arcsin(x) \pm \arctan(y)) = \frac{\sqrt{1-x^2} \mp xy}{\sqrt{1+y^2}} \quad (185)$$

$$\cos(\arccos(x) \pm \arccos(y)) = xy \mp \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \quad (186)$$

$$\cos(\arccos(x) \pm \arctan(y)) = \frac{x \mp y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+y^2}} \quad (187)$$

$$\cos(\arctan(x) \pm \arctan(y)) = \frac{1 \mp xy}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} \quad (188)$$

$$\tan(\arcsin(x) \pm \arcsin(y)) = \frac{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \mp xy} \quad (189)$$

$$\tan(\arcsin(x) \pm \arccos(y)) = \frac{xy \pm \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2}} \quad (190)$$

$$\tan(\arcsin(x) \pm \arctan(y)) = \frac{x \pm y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} \mp xy} \quad (191)$$

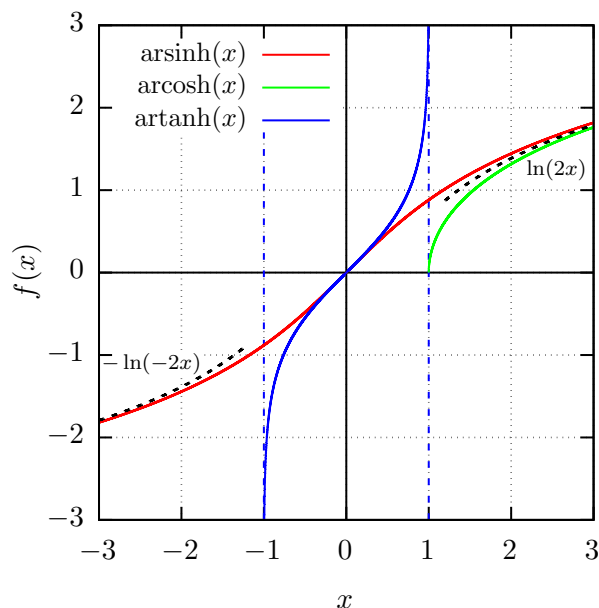
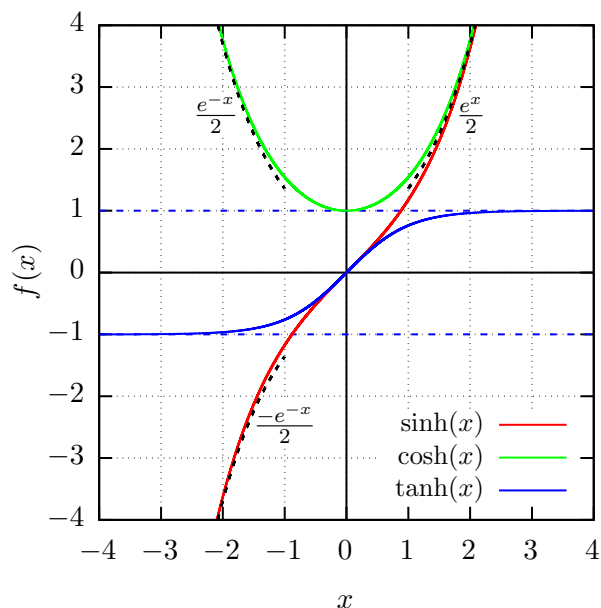
$$\tan(\arccos(x) \pm \arccos(y)) = \frac{y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2}}{xy \mp \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}} \quad (192)$$

$$\tan(\arccos(x) \pm \arctan(y)) = \frac{\sqrt{1-x^2} \pm xy}{x \mp y\sqrt{1-x^2}} \quad (193)$$

$$\tan(\arctan(x) \pm \arctan(y)) = \frac{x \pm y}{1 \mp xy} \quad (194)$$



## 8.2 Hyperbelfunktionen



$$\sinh(x) = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (195)$$

$$\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (196)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \quad (197)$$

$$1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2} \quad (198)$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \quad (199)$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x \quad (200)$$

$$\cosh(x)^2 + \sinh(x)^2 = \cosh(2x) \quad (201)$$

$$\cosh(x)^2 = \frac{\cosh(2x) + 1}{2} \quad (202)$$

$$\sinh(x)^2 = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \quad (203)$$

$$\sinh(x) \cdot \cosh(x) = \frac{\sinh(2x)}{2} \quad (204)$$

$$4 \cdot \sinh(x)^3 + 3 \cdot \sinh(x) = \sinh(3x) \quad (205)$$

$$4 \cdot \cosh(x)^3 - 3 \cdot \cosh(x) = \cosh(3x) \quad (206)$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (207)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (208)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \quad (209)$$

$$\sinh(x)^3 = \frac{\sinh(3x) - 3 \cdot \sinh(x)}{4} \quad (210)$$

### 8.2.1 Additionstheoreme

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y) \quad (211)$$

$$\cosh(x + y) = \sinh(x) \cdot \sinh(y) + \cosh(x) \cdot \cosh(y) \quad (212)$$

$$\sinh(x) \cdot \sinh(y) = \frac{\cosh(x + y) - \cosh(x - y)}{2} \quad (213)$$

$$\sinh(x) \cdot \cosh(y) = \frac{\sinh(x + y) + \sinh(x - y)}{2} \quad (214)$$

$$\cosh(x) \cdot \cosh(y) = \frac{\cosh(x + y) + \cosh(x - y)}{2} \quad (215)$$

$$\sinh(x) + \sinh(y) = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (216)$$

$$\cosh(x) + \cosh(y) = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (217)$$

$$\sinh(x) - \sinh(y) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (218)$$

$$\cosh(x) - \cosh(y) = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x - y}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad (219)$$

### 8.2.2 Verkettung von Hyperbel- und Areefunktionen

$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (220)$$

$$\sinh(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (221)$$

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1 + x^2} \quad (222)$$

$$\cosh(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (223)$$

$$\tanh(\operatorname{arsinh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (224)$$

$$\tanh(\operatorname{arcosh}(x)) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \quad (225)$$

$$\sinh(2\operatorname{arsinh}(x)) = 2x \cdot \sqrt{1 + x^2} \quad (226)$$

$$\sinh(2\operatorname{arcosh}(x)) = 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1} \quad (227)$$

$$\sinh(2\operatorname{artanh}(x)) = \frac{2x}{1 - x^2} \quad (228)$$

$$\cosh(2\operatorname{arsinh}(x)) = 2x^2 + 1 \quad (229)$$

$$\cosh(2\operatorname{arcosh}(x)) = 2x^2 - 1 \quad (230)$$

$$\cosh(2\operatorname{artanh}(x)) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \quad (231)$$

$$\tanh(2\operatorname{arsinh}(x)) = \frac{2x \cdot \sqrt{1 + x^2}}{2x^2 + 1} \quad (232)$$

$$\tanh(2\operatorname{arcosh}(x)) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1} \quad (233)$$

$$\tanh(2\operatorname{artanh}(x)) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (234)$$

### 8.3 Die Deltafunktion

Die Definition über die Faltungsneutralität:

$$f(x) * \delta(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b dx f(x) \cdot \delta(c-x) = \int_a^b dx f(x) \cdot \delta(x-c) = \begin{cases} f(c) & \text{für } c \in (a, b) \\ -f(c) & \text{für } c \in (b, a) \\ 0 & \text{sonst}^* \end{cases} \quad (235)$$

\* Für den Fall  $a = c$  oder  $b = c$  gibt es verschiedene Definitionen.

Die Eigenschaften der Deltafunktion:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \text{ ①} \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \text{ ②} \end{cases} \quad (236)$$

$$\int_a^b dx \delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } a < 0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \text{ ③} \quad (237)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \Rightarrow \delta(c \cdot (x - x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|c|} \quad \text{Wobei } x_i \text{ die Nullstellen von } f(x) \text{ sind.} \quad (238)$$

Wenn ① ② ③ gilt handelt es sich um die Deltafunktion.

Die Deltafunktion ausgedrückt durch Grenzwerte und Integrale:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi \cdot (x^2 + \epsilon^2)} \quad \delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(kx)^2}{\pi \cdot kx^2} \quad \delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \quad (239)$$

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \cdot e^{-x^2 k^2}}{\sqrt{\pi}} \quad \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad \delta(x) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{\pi} \cos(kx) \quad (240)$$

Mehrdimensionale Deltafunktionen:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)}{\mathcal{J}(x, y, z)} \quad (241)$$

### 8.4 Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{z.B.} \quad \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{\frac{2\pi i x \cdot (i-j)}{L}} \quad (242)$$

### 8.5 Greensfunktionen

$$G(x, z) = \begin{cases} A_+(z) \cdot f_+(x) & \text{für } x \geq z \\ A_-(z) \cdot f_-(x) & \text{für } x \leq z \end{cases} \quad (243)$$

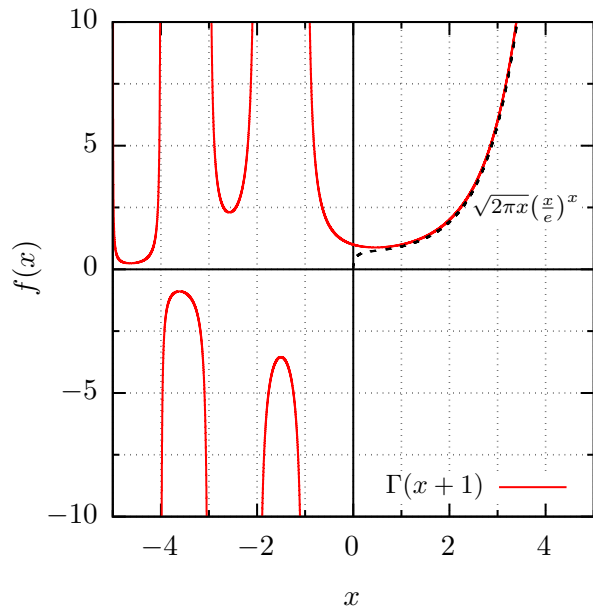
Bedingungen:

$$A_+(z) \cdot f_+(z) - A_-(z) \cdot f_-(z) = 0 \quad (244)$$

$$A_+(z) \cdot f'_+(z) - A_-(z) \cdot f'_-(z) = 1 \quad (245)$$

$A_+(z) \cdot f_+(x)$  ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung die Randbedingungen mit  $x > z$  erfüllt,  $A_-(z) \cdot f_-(x)$  die Lösung für die Randbedingungen mit  $x < z$ .

## 8.6 Gammafunktion und Fakultät



Die Definition der Gammafunktion lautet:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} dx x^{\nu-1} \cdot e^{-x} \quad (246)$$

Relationen und wichtige Werte:

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) = \nu! \quad (247)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (248)$$

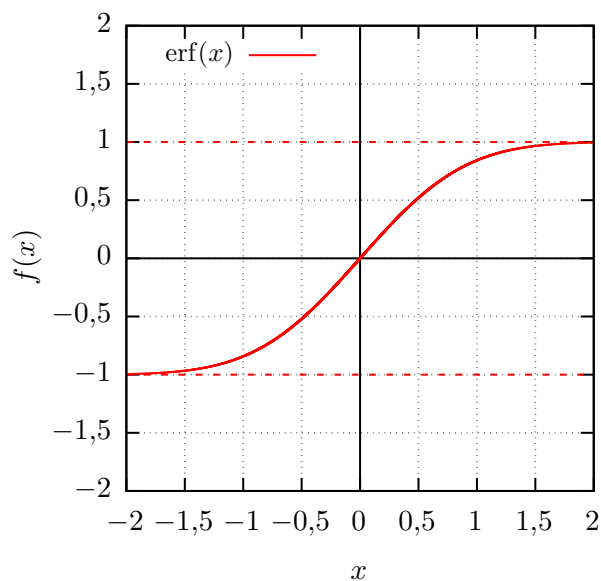
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \cdot \sqrt{\pi}}{n! \cdot 4^n} \quad \text{mit: } n \in \mathbb{N} \quad (249)$$

Für große  $N$  gilt die Stirling-Näherung:

$$\Gamma(N + 1) = N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (250)$$

$$\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N - d)} = N^d + \mathcal{O}(N^{d-1}) \quad (251)$$

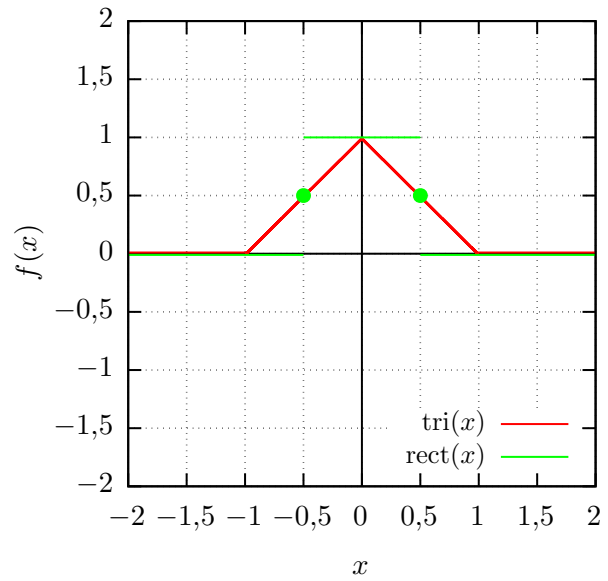
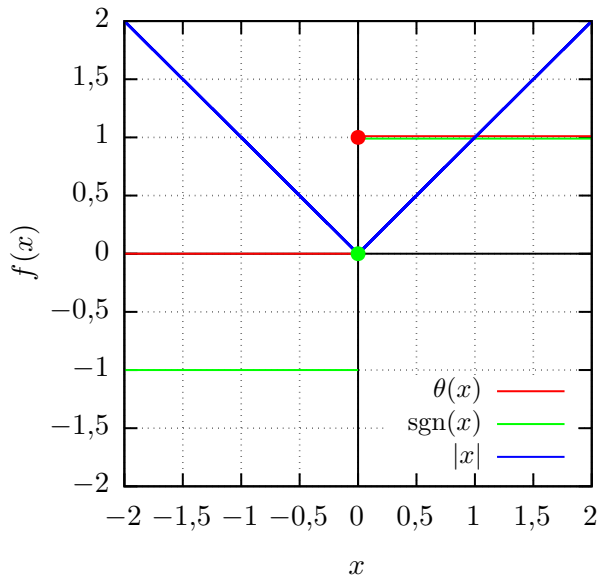
## 8.7 Fehlerfunktion



Die Definition der Fehlerfunktion lautet:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (252)$$

## 8.8 Abschnittsweise definierte Funktionen



$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (253)$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (254)$$

$$(255)$$

## 8.9 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (256)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad (257)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad \binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \quad (258)$$

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m} \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{n-2k} \cdot \left( \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} \right) \quad (259)$$

## 9 Taylorreihe

Eindimensional:

$$\mathcal{T}f(x), (x = x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n}{n!} \quad (260)$$

Mehrdimensional:

$$\mathcal{T}f(\vec{r}), (\vec{r} = \vec{r}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla_{\vec{r}'})^n}{n!} f(\vec{r}') \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0} \quad (261)$$

$$\mathcal{T}_1 f(\vec{r}), (\vec{r} = \vec{r}_0) = f(\vec{r}_0) + \nabla f(\vec{r})|_{\vec{r} = \vec{r}_0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (262)$$

## 9.1 Taylorreihen wichtiger Funktionen

$$\mathcal{T}e^x, (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (263)$$

$$\mathcal{T}\sin(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (264)$$

$$\mathcal{T}\cos(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (265)$$

$$\mathcal{T}_7 \tan(x), (x=0) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \quad \text{---} \quad (266)$$

$$\mathcal{T}\arcsin(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n+1}}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)} \quad \text{für } |x| \leq 1 \quad (267)$$

$$\mathcal{T}\arccos(x), (x=0) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^{2n+1}}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)} \quad \text{für } |x| \leq 1 \quad (268)$$

$$\mathcal{T}\arctan(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x| \leq 1 \quad (269)$$

$$\mathcal{T}\sinh(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (270)$$

$$\mathcal{T}\cosh(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (271)$$

$$\mathcal{T}_7 \tanh(x), (x=0) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 \quad \text{---} \quad (272)$$

$$\mathcal{T}\operatorname{arsinh}(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n)! \cdot x^{2n+1}}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)} \quad \text{für } |x| \leq 1 \quad (273)$$

$$\mathcal{T}\operatorname{artanh}(x), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (274)$$

$$\mathcal{T}\ln(1-x), (x=0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n} \quad \text{für } -1 \leq x < 1 \quad (275)$$

$$\mathcal{T}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (276)$$

$$\mathcal{T}\frac{1}{1-x}, (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{für } |x| < 1 \quad (277)$$

$$\mathcal{T}\frac{1}{(1-x)^2}, (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n \quad \text{für } |x| < 1 \quad (278)$$

$$\mathcal{T}\frac{1}{1-x^2}, (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (279)$$

$$\mathcal{T}\frac{1}{1+x^2}, (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (280)$$

## 9.2 Binomische Reihe

$$\mathcal{T}(1+x)^a, (x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot x^n \quad \begin{array}{ll} \text{für } -1 \leq x \leq 1 & \text{falls } 0 \leq a \\ \text{für } -1 < x \leq 1 & \text{falls } -1 < a < 0 \\ \text{für } -1 < x < 1 & \text{falls } a \leq -1 \end{array} \quad (281)$$

## 10 Summenformeln

Die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1 \quad (282)$$

Gaußsche Summenformeln:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad (283)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad (284)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \quad (285)$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \quad (286)$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{mit: } n \in \mathbb{N}_0 \quad (287)$$

Summenformeln die aus dem Satz von Parseval folgen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (288)$$

Mit Hilfe der Poisson-Summe berechenbare Summen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{-7\pi^4}{720} \quad (289)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{a \tanh(\pi a)} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (290)$$

Ising-Summe:

$$\sum_{s_1=\pm 1} \prod_{i=2}^N \sum_{s_i=\pm 1} e^{K s_{i-1} s_i} = 2(2 \cosh(K))^{N-1} \quad (291)$$

Gothmann-Summe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n x^n} = \ln \left( \frac{x}{x-1} \right) \quad \text{für } |x| > 1 \quad (292)$$

## 11 Differentialoperatoren

Im 2-Dimensionalen:

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} \quad \nabla \vec{f} = \text{div}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \cdot \vec{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y \quad (293)$$

$$\nabla \times \vec{f} = \text{rot}(\vec{f}) = \partial_x f_y - \partial_y f_x \quad (294)$$

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f \quad (295)$$

Im 3-Dimensionalen:

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \quad \nabla \vec{f} = \text{div}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \vec{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z \quad (296)$$

$$\nabla \times \vec{f} = \text{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} \quad (297)$$

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f \quad (298)$$

Weitere Operatoren:

$$\hat{\mathbf{J}}f = -i\hat{e}_\phi \partial_\vartheta f + \frac{i}{\sin(\vartheta)} \hat{e}_\vartheta \partial_\phi f \quad (299)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 f = -\frac{1}{\sin(\vartheta)} \partial_\vartheta \sin(\vartheta) \partial_\vartheta f - \frac{1}{\sin(\vartheta)^2} \partial_\phi^2 f \quad (300)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_\nu f(x) = x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x \frac{d}{dx} f(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) \quad (301)$$

$$\square f = \frac{1}{c^2} \cdot \partial_t^2 f - \Delta f \quad (302)$$

Relationen:

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \nabla^2 f = \Delta f \quad (303)$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{f})) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{f} = 0 \quad (304)$$

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = \nabla \times \nabla f = \vec{0} \quad (305)$$

Operatoren in allgemeiner 3-Dimensionaler Form mit den metrischen Faktoren  $h_n = |\partial_n \vec{r}|$ : (306)

$$\text{grad}(f) = \frac{1}{h_1} \cdot (\partial_1 f) \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot (\partial_2 f) \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot (\partial_3 f) \hat{e}_3 \quad (307)$$

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot (\partial_1(h_2 \cdot h_3 \cdot f_1) + \partial_2(h_1 \cdot h_3 \cdot f_2) + \partial_3(h_1 \cdot h_2 \cdot f_3)) \quad (308)$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot \left( \partial_1 \left( \frac{h_2 \cdot h_3}{h_1} \cdot \partial_1 f \right) + \partial_2 \left( \frac{h_1 \cdot h_3}{h_2} \cdot \partial_2 f \right) + \partial_3 \left( \frac{h_1 \cdot h_2}{h_3} \cdot \partial_3 f \right) \right) \quad (309)$$

$$\text{rot}(\vec{f}) = \frac{1}{h_2 \cdot h_3} \cdot (\partial_2(h_3 \cdot f_3) - \partial_3(h_2 \cdot f_2)) \hat{e}_1 + \frac{1}{h_1 \cdot h_3} \cdot (\partial_3(h_1 \cdot f_1) - \partial_1(h_3 \cdot f_3)) \hat{e}_2 \\ + \frac{1}{h_1 \cdot h_2} \cdot (\partial_1(h_2 \cdot f_2) - \partial_2(h_1 \cdot f_1)) \hat{e}_3 \quad (310)$$



## 12 Koordinatensysteme

### 12.1 Jacobian:

$$\mathcal{J}(u, v, w) = |\det(\text{mat}(\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}, \partial_w \vec{r}))| = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{pmatrix} \right| \quad \text{mit: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix} \quad (311)$$

### 12.2 Polarkoordinaten

Wertebereich:

$$r \in [0, \infty) \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad (312)$$

Transformation:

$$x = r \cos(\phi) \quad (313)$$

$$y = r \sin(\phi) \quad (314)$$

Rücktransformation:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (315)$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (316)$$

Jacobian:

$$\mathcal{J}(r, \phi) = r \quad (317)$$

Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (318)$$

Operatoren:

$$\text{grad}(f) = (\partial_r f) \hat{e}_r + \frac{1}{r} (\partial_\phi f) \hat{e}_\phi \quad (319)$$

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{1}{r} \partial_r r f_r + \frac{1}{r} \partial_\phi f_\phi \quad (320)$$

$$\Delta f = \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 f \quad (321)$$

$$\text{rot}(\vec{f}) = \frac{1}{r} (\partial_r r f_\phi - \partial_\phi f_r) \quad (322)$$

Metrische Faktoren  $h_n = |\partial_n \vec{r}|$ :

$$h_r = 1 \quad (323)$$

$$h_\phi = r \quad (324)$$

### 12.3 Ellipsenkoordinaten

Wertebereich:

$$r \in [0, \infty) \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad (325)$$

Koordinationskörper:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (326)$$

Transformation:

$$x = a \cdot r \cos(\phi) \quad (327)$$

$$y = b \cdot r \sin(\phi) \quad (328)$$

Rücktransformation:

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad (329)$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right) & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right) + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{ar}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{ar}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (330)$$

Jacobian:

$$\mathcal{J}(r, \phi) = ab \cdot r \quad (331)$$

Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_r = \frac{\begin{pmatrix} a \cos(\phi) \\ b \sin(\phi) \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi)}} \quad \hat{e}_\phi = \frac{\begin{pmatrix} -a \sin(\phi) \\ b \cos(\phi) \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2(\phi)}} \quad (332)$$

Metrische Faktoren  $h_n = |\partial_n \vec{r}|$ :

$$h_r = \sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi)} \quad (333)$$

$$h_\phi = r \sqrt{a^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2(\phi)} \quad (334)$$

## 12.4 Zylinderkoordinaten

Wertebereich:

$$r \in [0, \infty) \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (335)$$

Transformation:

$$x = r \cos(\phi) \quad (336)$$

$$y = r \sin(\phi) \quad (337)$$

$$z = z \quad (338)$$

Rücktransformation:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (339)$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (340)$$

$$z = z \quad (341)$$

Jacobian:

$$\mathcal{J}(r, \phi, z) = r \quad (342)$$

Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (343)$$

Operatoren:

$$\text{grad}(f) = (\partial_r f) \hat{e}_r + \frac{1}{r} (\partial_\phi f) \hat{e}_\phi + (\partial_z f) \hat{e}_z \quad (344)$$

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{1}{r} \partial_r r f_r + \frac{1}{r} \partial_\phi f_\phi + \partial_z f_z \quad (345)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f \quad (346)$$

$$\text{rot}(\vec{f}) = \left( \frac{1}{r} \partial_\phi f_z - \partial_z f_\phi \right) \hat{e}_r + (\partial_z f_r - \partial_r f_z) \hat{e}_\phi + \frac{1}{r} (\partial_r r f_\phi - \partial_\phi f_r) \hat{e}_z \quad (347)$$

Metrische Faktoren  $h_n = |\partial_n \vec{r}|$ :

$$h_r = 1 \quad (348)$$

$$h_\phi = r \quad (349)$$

$$h_z = 1 \quad (350)$$

## 12.5 Kugelkoordinaten

Wertebereich:

$$r \in [0, \infty) \quad \vartheta \in [0, \pi) \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad (351)$$

Transformation:

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\phi) \quad (352)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\phi) \quad (353)$$

$$z = r \cos(\vartheta) \quad (354)$$

Rücktransformation:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (355)$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \quad (356)$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (357)$$

Jacobian:

$$\mathcal{J}(r, \vartheta, \phi) = r^2 \sin(\vartheta) \quad (358)$$

Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cdot \cos(\phi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \sin(\phi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cdot \cos(\phi) \\ \cos(\vartheta) \cdot \sin(\phi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (359)$$

Operatoren:

$$\text{grad}(f) = (\partial_r f) \hat{e}_r + \frac{1}{r} (\partial_\vartheta f) \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\partial_\phi f) \hat{e}_\phi \quad (360)$$

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 f_r + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta \sin(\vartheta) f_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\phi f_\phi \quad (361)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r f + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta \sin(\vartheta) \partial_\vartheta f + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)^2} \partial_\phi^2 f = \frac{1}{r^2} (\partial_r r^2 \partial_r f - \hat{\mathbf{J}}^2 f) \quad (362)$$

$$\text{rot}(\vec{f}) = \frac{1}{r \sin(\vartheta)} (\partial_\vartheta \sin(\vartheta) f_\phi - \partial_\phi f_\vartheta) \hat{e}_r + \left( \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\phi f_r - \frac{1}{r} \partial_r r f_\phi \right) \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r} (\partial_r r f_\vartheta - \partial_\vartheta f_r) \hat{e}_\phi \quad (363)$$

Metrische Faktoren  $h_n = |\partial_n \vec{r}|$ :

$$h_r = 1 \quad (364)$$

$$h_\vartheta = r \quad (365)$$

$$h_\phi = r \sin(\vartheta) \quad (366)$$

## 12.6 Ellipsoidkoordinaten

Koordinationskörper:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a, b, c > 0 \quad (367)$$

Transformation:

$$x = a \cdot r \sin(\vartheta) \cos(\phi) \quad (368)$$

$$y = b \cdot r \sin(\vartheta) \sin(\phi) \quad (369)$$

$$z = c \cdot r \cos(\vartheta) \quad (370)$$

### 12.6.1 mit konstantem Radius

Rücktransformation:

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad (371)$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z}{c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}\right) = \arccos\left(\frac{z}{cr}\right) \quad (372)$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right) & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right) + 2\pi & \text{für } x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} \quad (373)$$

Jacobian:

$$\mathcal{J}(r, \vartheta, \phi) = abc \cdot r^2 \sin(\vartheta) \quad (374)$$

### 12.6.2 mit Radiusfunktion

Rücktransformation:

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (375)$$

$$r_{\varnothing}^2 = \frac{r_{\min}^2 + r_{\max}^2}{2} \quad (376)$$

$$r_{\varnothing}^3 = abc \quad (377)$$

Jacobian:

$$\mathcal{J}(r(x, y, z), \vartheta, \phi) = r(x, y, z)^2 \cdot \sin(\vartheta) \quad (378)$$

## 13 Vektoranalysis

$f(x)$  normale Funktion       $\vec{f}(x)$  Raumkurve       $f(\vec{r})$  Skalarfeld       $\vec{f}(\vec{r})$  Vektorfeld

### 13.1 Antikommutative Graßmann-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (379)$$

### 13.2 Volumenintegrale

$$I = \int_V dV f(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv \int_e^f dw f(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \mathcal{J}(u, v, w) \quad (380)$$

$$\vec{I} = \int_V dV \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv \int_e^f dw \vec{f}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \mathcal{J}(u, v, w) \quad (381)$$

### 13.3 Oberflächenintegrale

$$I = \int_S dS f(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv |\partial_u \vec{r}(u, v, w) \times \partial_v \vec{r}(u, v, w)| \cdot f(\vec{r}(u, v, w)) \quad (382)$$

$$\vec{I} = \int_S dS \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv |\partial_u \vec{r}(u, v, w) \times \partial_v \vec{r}(u, v, w)| \cdot \vec{f}(\vec{r}(u, v, w)) \quad (383)$$

$$\vec{I} = \int_S d\vec{S} f(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv (\partial_u \vec{r}(u, v, w) \times \partial_v \vec{r}(u, v, w)) \cdot f(\vec{r}(u, v, w)) \quad (384)$$

$$I = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv (\partial_u \vec{r}(u, v, w) \times \partial_v \vec{r}(u, v, w)) \cdot \vec{f}(\vec{r}(u, v, w)) \quad (385)$$

$$\vec{I} = \int_S d\vec{S} \times \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b du \int_c^d dv (\partial_u \vec{r}(u, v, w) \times \partial_v \vec{r}(u, v, w)) \times \vec{f}(\vec{r}(u, v, w)) \quad (386)$$

$w$  kann entweder in Abhängigkeit von  $u$  und  $v$  ausgedrückt werden oder ist konstant. Ist  $w$  konstant kann das Flächenelement aus den metrischen Faktoren des Koordinatensystems berechnet werden, das die Basisvektoren  $\hat{e}_u$ ,  $\hat{e}_v$  und  $\hat{e}_w$  hat, sofern diese orthogonal aufeinander stehen:

$$dS = du dv h_u h_v |_{w=\text{konst}} \quad d\vec{S} = du dv h_u h_v \cdot \hat{e}_w |_{w=\text{konst}} \quad (387)$$

### 13.4 Linienintegrale

$$\vec{I} = \int_C d\vec{r} f(\vec{r}) = \int_a^b dt \left( \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right) \cdot f(\vec{r}(t)) \quad (388)$$

$$I = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b dt \left( \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \quad (389)$$

$$\vec{I} = \int_C d\vec{r} \times \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b dt \left( \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right) \times \vec{f}(\vec{r}(t)) \quad (390)$$

Definition der Bogenlänge:

$$\int_C ds = \int_a^b dt \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| \quad (391)$$

Bogenintegrale:

$$I = \int_C ds f(\vec{r}) = \int_a^b dt \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| \cdot f(\vec{r}(t)) \quad (392)$$

$$\vec{I} = \int_C ds \vec{f}(\vec{r}) = \int_a^b dt \left| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right| \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \quad (393)$$

### 13.5 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Die Produkt- und Quotientenregel funktioniert bei eindimensionalen Ableitungsoperatoren erster Ordnung immer. Hat man es mit mehrdimensionalen Differentialoperatoren erster Ordnung zu tun, muss zwischen Skalar- und Kreuzprodukt unterschieden werden. Beim Skalarprodukt funktioniert die Ketten-, Produkt- und Quotientenregel solange man es nicht mit einem Skalarprodukt zweier Vektoren zu tun hat (beim Skalarprodukt mit Nabla funktionieren Produkt- und Quotientenregel). Bei einem Kreuzprodukt oder bei Ableitungsoperatoren höherer Ordnung greifen folgende Regeln:

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) \quad (394)$$

$$\nabla \times (a \cdot \vec{b}) = a \cdot (\nabla \times \vec{b}) + (\nabla \cdot a) \times \vec{b} \quad (395)$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \vec{b} \\ a \end{pmatrix} = \frac{a \cdot (\nabla \times \vec{b}) - (\nabla \cdot a) \times \vec{b}}{a^2} \quad (396)$$

$$\Delta(f \cdot g) = g \cdot \Delta f + 2 \cdot (\nabla f \cdot \nabla g) + f \cdot \Delta g \quad (397)$$

Zürich-Invarianz:

$$\nabla f(r) = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1. \text{ Züricher-Invarianzsatz}) \quad (\text{Bei Substitution innere Ableitung!!!}) \quad (398)$$

$$\Delta f(r) = \frac{n-1}{r} \cdot f'(r) + f''(r) \quad (2. \text{ Züricher-Invarianzsatz}) \quad (\text{Gilt nur im } n\text{-dimensionalen}) \quad (399)$$

Beim Durch-Null-Teilen ist Vorsicht geboten, es gilt:

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \cdot \delta(\vec{r}) \quad (400)$$

Graßmann'sche-Nabla-Identitäten:

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot (\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\nabla \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \cdot \vec{b} \quad (401)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (402)$$

### 13.6 Gauß'scher Integralsatz

$$\int_V dV \operatorname{div}(\vec{A}) = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int_{\partial V} dS \vec{n} \cdot \vec{A} \quad (403)$$

### 13.7 Integralsatz von Stokes

$$\int_S d\vec{S} \cdot \operatorname{rot}(\vec{A}) = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A} \quad (404)$$

### 13.8 Mehrdimensionale partielle Integration

$$\int_V dV f \nabla \vec{g} = \int_{\partial V} d\vec{S} f \cdot \vec{g} - \int_V dV \vec{g} \cdot \nabla f \quad (405)$$

$$\int_V dV (\nabla f) \cdot (\nabla g) = \int_{\partial V} d\vec{S} f \cdot \nabla g - \int_V dV f \Delta g \quad (406)$$

$$\int_V dV (f \Delta g - g \Delta f) = \int_{\partial V} d\vec{S} (f \nabla g - g \nabla f) \quad (407)$$

Mit einem beliebigen  $n$ -dimensionalem Volumen  $V$

### 13.9 Gradientenfeld

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r}) \quad \Phi(\vec{r}) \text{ ist ein Potential vom Gradientenfeld } \vec{f}(\vec{r}) \quad (408)$$

# 14 Fourier

## 14.1 Fourierreihen

$$\mathcal{F}(f(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot e^{ik_n x} \quad \text{mit: } k_n = \frac{2\pi n}{L} \quad (L = \text{Periodenlänge}) \quad (409)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) \cdot e^{-ik_n x} \quad (410)$$

Rechenregeln:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \mapsto \hat{f}(n) = \hat{g}(n) * \hat{h}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \cdot \hat{h}(n-k) \quad (411)$$

$$f(x) = g'(x) \mapsto \hat{f}(n) = ik_n \cdot \hat{g}(n) \quad (412)$$

Satz von Parseval:

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \quad (413)$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) \cdot g^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \hat{g}^*(n) \quad (414)$$

Reelle Form der Fourierreihe:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x) \quad (415)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos(k_n x) \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin(k_n x) \quad (416)$$

komplex  $\Leftrightarrow$  reell-Transformation:

komplex	$\Leftrightarrow$	reell	
$\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$		$a_0 = 2 \cdot \hat{f}(0)$	(417)

$\hat{f}(n) = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2}$		$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)$	(418)
--	--	----------------------------------	-------

$\hat{f}(-n) = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2}$		$b_n = i \cdot (\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))$	(419)
---	--	--	-------

Kontinuumsimes:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \quad (420)$$



## 14.2 Fouriertransformation

Transformation:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot e^{-ikx} \quad \text{mit: } k \in \mathbb{F} \hat{=} \mathbb{R} \quad (421)$$

Rücktransformation:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(k) \cdot e^{ikx} \quad (422)$$

Wichtige Fouriertransformierte:

$$f(x) = c \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = 2\pi c \cdot \delta(k) \quad (423)$$

$$f(x) = e^{iax} \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = 2\pi \cdot \delta(k - a) \quad (424)$$

$$f(x) = \delta(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = 1 \quad (425)$$

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \frac{2a}{a^2 + k^2} \quad (426)$$

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} \quad (427)$$

$$f(x) = \text{rect}(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{k}{2}\right)}{k} \quad (428)$$

$$f(x) = \text{tri}(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{k}{2}\right)^2}{k^2} \quad (429)$$

Satz von Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}^*(k) \quad (430)$$

Poisson-Summe:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(Ln) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{2\pi}{L} \cdot n\right) \quad \text{für jedes } L > 0 \quad (431)$$

## 14.3 Allgemeine Regeln

Transformationsgesetze:

$$f(x) = g(x + a) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \hat{g}(k) \cdot e^{ika} \quad (432)$$

$$f(x) = g(x) \cdot e^{iqx} \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \hat{g}(k - q) \quad (433)$$

$$*f(x) = g'(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = ik \cdot \hat{g}(k) \quad (434)$$

$$*f(x) = x \cdot g(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = i \cdot \hat{g}'(k) \quad (435)$$

$$*f(x) = g(ax) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{|a|} \cdot \hat{g}\left(\frac{k}{a}\right) \quad (436)$$

$$*f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) \cdot h(x - y) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \hat{g}(k) \cdot \hat{h}(k) \quad (437)$$

$$*f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \hat{g}(y) \cdot \hat{h}(k - y) \quad (438)$$

$$f(x) = g^*(x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \hat{g}^*(-k) \quad (439)$$

$$f(x) = g(-x) \quad \mapsto \quad \hat{f}(k) = \hat{g}(-k) \quad (440)$$

\* Diese Relationen gelten nur für die Fouriertransformation. (Prinzipiell lassen sich diese Relationen auch für die Fourierreihe verallgemeinern, da der selbe Transformationsmechanismus zugrunde liegt.)

Symmetriegesetze:

$$\operatorname{Im}(f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k) \quad \Leftrightarrow \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad (441)$$

$$\operatorname{Re}(f(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = -\hat{f}^*(-k) \quad \Leftrightarrow \quad a_k, b_k \in i\mathbb{R} \quad (442)$$

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \hat{f}(-k) \quad \Leftrightarrow \quad b_k = 0 \quad (443)$$

$$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = -\hat{f}(-k) \quad \Leftrightarrow \quad a_k = 0 \quad (444)$$

An Sprungstellen gilt:

$$\mathcal{F}(f(x_0)) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right) \quad \text{mit Sprungstelle } x_0 \quad (445)$$

Zweimaliges Fouriertransformieren führt zu einer gestreckten Spiegelung:

$$\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x) \quad (446)$$

## 14.4 Fouriertransformation in 3D

Transformation:

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r f(\vec{r}) \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \text{mit: } \vec{k} \in \mathbb{F}^3 \cong \mathbb{R}^3 \quad (447)$$

Rücktransformation:

$$f(\vec{r}) = \int_{\mathbb{F}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{f}(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (448)$$

Operatortransformation:

$$f(\vec{r}) = \partial_x g(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{f}(\vec{k}) = ik_x \hat{g}(\vec{k}) \quad (449)$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \nabla g(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{\vec{f}}(\vec{k}) = i\vec{k} \hat{g}(\vec{k}) \quad (450)$$

$$f(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{f}(\vec{k}) = i\vec{k} \cdot \hat{\vec{g}}(\vec{k}) \quad (451)$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{g}(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{\vec{f}}(\vec{k}) = i\vec{k} \times \hat{\vec{g}}(\vec{k}) \quad (452)$$

$$f(\vec{r}) = \Delta g(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{f}(\vec{k}) = -k^2 \hat{g}(\vec{k}) \quad (453)$$

$$f(\vec{r}) = xg(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{f}(\vec{k}) = i\partial_{k_x} \hat{g}(\vec{k}) \quad (454)$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}g(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{\vec{f}}(\vec{k}) = i\nabla_{\vec{k}} \hat{g}(\vec{k}) \quad (455)$$

$$f(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{g}(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{f}(\vec{k}) = i\nabla_{\vec{k}} \cdot \hat{\vec{g}}(\vec{k}) \quad (456)$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{g}(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{\vec{f}}(\vec{k}) = i\nabla_{\vec{k}} \times \hat{\vec{g}}(\vec{k}) \quad (457)$$

$$f(\vec{r}) = r^2 g(\vec{r}) \quad \mapsto \quad \hat{f}(\vec{k}) = -\Delta_{\vec{k}} \hat{g}(\vec{k}) \quad (458)$$

Isotrope Funktionen:

Da sich das Skalarprodukt  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  als  $k \cdot \cos(\vartheta) \cdot r$  schreiben lässt, kann man bei isotropen Funktionen die dreidimensionale Integration auf die Transformation der Radialkomponente reduzieren:

$$\hat{f}(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty dr f(r) \cdot r \sin(kr) \quad (459)$$

$$f(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \hat{f}(k) \cdot k \sin(kr) \quad (460)$$

Wichtige Fouriertransformierte:

$$f(r) = \frac{1}{r} \mapsto \hat{f}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \quad f(r) = e^{-ar^2} \mapsto \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} \quad (461)$$

## 15 Variationsrechnung

### 15.1 Funktionalrechnung

Für die Variation eines Funktionals  $F[u(\vec{r})]$  gilt:

$$\delta F[u(\vec{r}), \delta u(\vec{r})] = \left. \frac{d}{d\epsilon} F[u(\vec{r}) + \epsilon \delta u(\vec{r})] \right|_{\epsilon=0} \quad (462)$$

Für die Funktionalableitung von  $F[u(\vec{r})]$  muss die Variation auf folgende Form gebracht werden, die Funktionalableitung kann dann einfach abgelesen werden (Kasten):

$$\delta F[u(\vec{r}), \delta u(\vec{r})] = \int_V dV \left[ \frac{\delta F[u(\vec{r})]}{\delta u(\vec{r})} \right] \delta u(\vec{r}) \quad (463)$$

Das Nullsetzen der Funktionalableitung führt auf die Lagrange-Gleichung des Systems und liefert so den idealen Zustand:

$$0 = \frac{\delta F[u(\vec{r})]}{\delta u(\vec{r})} \quad (464)$$

### 15.2 Lagrangeformalismus

$$L[q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t] = T[q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t] - U[q_1, \dots, q_n, t] \quad (465)$$

Ergibt  $n$  Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}_n} L - \partial_{q_n} L = 0 \quad (466)$$

Lagrange-Multiplikation:

$$L_{\text{ges}}[q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, \lambda, \dot{\lambda}, t] = L_{\text{frei}}[q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t] + \lambda \cdot g[q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t] \quad (467)$$

▷ Die Form von  $g[q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t]$  ist durch die Nebenbedingung bestimmt.

Ist  $g = 0$  ist die Nebenbedingung erfüllt, für den Fall  $g \neq 0$  verletzt.

▷  $g$  kann von beliebig vielen Funktionale und deren ersten zeitlichen Ableitungen abhängen.

▷ Die Lagrange-Multiplikation kann bei mehreren Nebenbedingungen mehrmals wiederholt werden.

Dadurch erhöht sich die Anzahl der Lagrange-Gleichungen jedes mal um eins.

### 15.3 Hamiltonformalismus

$$H[q_1, p_1, \dots, q_n, p_n, t] = T[q_1, p_1, \dots, q_n, p_n, t] + U[q_1, \dots, q_n, t] \quad (468)$$

Ergibt  $2n$  kanonische Gleichungen:

$$\partial_{p_n} H = \dot{q}_n \quad \partial_{q_n} H = -\dot{p}_n \quad (469)$$

## 16 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Symmetrie-Gleichungen für externe Potentiale:

$$\frac{d}{dt} \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \text{zeitlich homogenes Potential} \quad \Leftrightarrow \text{Energieerhaltung} \quad (470)$$

$$\nabla \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \text{räumlich homogenes Potential} \quad \Leftrightarrow \text{Impulserhaltung} \quad (471)$$

$$\vec{r} \times \nabla \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \text{isotropes Potential} \quad \Leftrightarrow \text{Drehimpulserhaltung} \quad (472)$$

## 17 Stochastik

### 17.1 Verteilungsfunktionen

Gauß-Verteilung 1-dimensional:  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(\frac{-(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$  (473)

Gauß-Verteilung  $d$ -dimensional:  $p(\vec{r}) = \sqrt{\frac{d}{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(\frac{-d(\vec{r} - \vec{\bar{r}})^2}{2\sigma^2}\right)$  (474)

Lorentz-Verteilung:  $p(x) = \frac{s}{\pi(s^2 + (x - \bar{x})^2)}$  mit:  $s > 0$  (475)

Gleichverteilung:  $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  (476)

Exponential-Verteilung:  $p(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$  mit:  $a > 0$  (477)

Fermi-Dirac-Verteilung:  $p(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$  (478)

Bose-Einstein-Verteilung:  $p(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} - 1}$  (479)

Planck-Verteilung:  $p(E) = \frac{15\beta^4}{\pi^4} \cdot \frac{E^3}{e^{\beta E} - 1}$  (480)

Poisson-Verteilung:  $P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$  mit:  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\lambda > 0$  (481)

Binomialverteilung:  $P(k) = \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k}$  mit:  $n, k \in \mathbb{N}_0$  und  $s \in [0, 1]$  (482)

### 17.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

	Kontinuierlich:	Diskret:	
Erwartungswert	$\langle x \rangle = \int_M dx x \cdot p(x)$	$\langle n \rangle = \sum_{n \in M} n \cdot P(n)$	(483)

Erwartungswert einer Observablen	$\langle A \rangle = \int_M dx A(x) \cdot p(x)$	$\langle A \rangle = \sum_{n \in M} A(n) \cdot P(n)$	(484)
----------------------------------	---	--	-------

Varianz	$\text{Var}(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$	$\text{Var}(n) = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$	(485)
---------	---	---	-------

Standardabweichung	$\sigma(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}$	$\sigma(n) = \sqrt{\text{Var}(n)}$	(486)
--------------------	------------------------------------	------------------------------------	-------

Selbstverständlich kann wie der Erwartungswert auch die Varianz  $\text{Var}(A) = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$  und damit die Standardabweichung  $\sigma(A)$  für eine beliebige Observable  $A$  berechnet werden.

Für  $M$  ist entweder die Menge aller möglichen Werte für  $x$  bzw.  $n$  oder der Definitionsbereich von  $p(x)$  bzw.  $P(n)$  einzusetzen. Die Wahl ist für das Ergebnis egal.

## 18 Funktionenklassen

### 18.1 Legendrepolynome

Die Differentialgleichung des Polaranteils des Laplace- und Drehimpulsoperators lautet:

$$\frac{1}{\sin(\vartheta)} \partial_{\vartheta} \sin(\vartheta) \partial_{\vartheta} f_k(\vartheta) + k \cdot f_k(\vartheta) = 0 \quad (487)$$

Durch Substitution mit  $x = \cos(\vartheta) \Rightarrow \partial_{\vartheta} = -\sin(\vartheta) \frac{d}{dx}$  und  $k = l(l+1)$  erhält man:

$$(1-x^2) P_l''(x) - 2x \cdot P_l'(x) + l(l+1) \cdot P_l(x) = 0 \quad (488)$$

Die Legendrepolynome lösen diese Differentialgleichung. Man erhält sie mittels folgender Formel:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \cdot (2l-2k)!}{(l-k)! \cdot (l-2k)! \cdot k! \cdot 2^l} \cdot x^{l-2k} \quad (489)$$

Die Legendrepolynome bilden auf dem Bereich  $x \in [-1, 1]$  eine orthogonale Basis. Sie sind folgendermaßen normiert:

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) \cdot P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \cdot \delta_{ll'} \quad (490)$$

Die ersten Legendrepolynome lauten:

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad (491)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \quad P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) \quad (492)$$

Da es sich oben um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, gibt es zu jedem Polynom noch eine weitere linear unabhängige Lösung. Diese Lösungen nennt man Legendrefunktionen zweiter Art. Sie sind keine Polynome mehr und divergent für  $x = \pm 1$  bzw.  $\vartheta \in \{0, \pi\}$ . Die Randbedingungen verbieten aber oft Divergenzen auf der  $z$ -Achse sodass meist nur die Polynome Teil der Lösung sind.

Entwicklung in Legendrepolynome:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot P_l(x) \quad c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) \cdot P_l(x) \quad (493)$$

### 18.2 Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen lösen die Drehimpulseigenwertgleichung:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 Y_{lm}(\vartheta, \phi) = -\frac{1}{\sin(\vartheta)} \partial_{\vartheta} \sin(\vartheta) \partial_{\vartheta} Y_{lm}(\vartheta, \phi) - \frac{1}{\sin(\vartheta)^2} \partial_{\phi}^2 Y_{lm}(\vartheta, \phi) = l(l+1) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \phi) \quad (494)$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden eine orthonormale Basis sodass gilt:

$$\langle Y_{lm} | Y_{l'm'} \rangle = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) \cdot Y_{l'm'}(\vartheta, \phi) \cdot \sin(\vartheta) = \delta_{ll'} \cdot \delta_{mm'} \quad (495)$$

Für die komplexe Konjugation gilt:

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) = (-1)^m \cdot Y_{l-m}(\vartheta, \phi) \quad (496)$$

Symmetrieeigenschaften:

- Symmetrisch zum Ursprung wenn  $l$  gerade
- Antisymmetrisch zum Ursprung wenn  $l$  ungerade
- rotationssymmetrisch um die  $z$ -Achse wenn  $m = 0$

Die ersten Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin(\vartheta)^2 e^{2i\phi} \quad (497)$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) e^{i\phi} \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) e^{i\phi} \quad (498)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\vartheta) \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos(\vartheta)^2 - 1) \quad (499)$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) e^{-i\phi} \quad Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) e^{-i\phi} \quad (500)$$

$$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin(\vartheta)^2 e^{-2i\phi} \quad (501)$$

Deltafunktion in Kugelflächenfunktionen:

$$\delta(\vartheta - \vartheta') \cdot \delta(\phi - \phi') = \sin(\vartheta) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \phi) \cdot Y_{lm}^*(\vartheta', \phi') \quad (502)$$

Entwicklung in Kugelflächenfunktionen:

$$f(\vartheta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} \cdot Y_{lm}(\vartheta, \phi) \quad c_{lm} = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) \cdot f(\vartheta, \phi) \cdot \sin(\vartheta) \quad (503)$$

### 18.3 Radialfunktionen

Die Radialfunktionen lösen folgende Differentialgleichung:

$$r^2 \cdot R_{nl}''(r) + 2r \cdot R_{nl}'(r) + \left( -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{r^2}{a^2} + 2 \cdot \frac{r}{a} - l \cdot (l+1) \right) \cdot R_{nl}(r) = 0 \quad (504)$$

Die Radialfunktionen sind normiert:

$$\int_0^{\infty} dr R_{nl}(r)^2 \cdot r^2 = 1 \quad (505)$$

Die ersten Radialfunktionen:

$$R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \quad R_{20} = \frac{1}{2\sqrt{2a^3}} \left( -\frac{r}{a} + 2 \right) e^{-\frac{r}{2a}} \quad R_{30} = \frac{2}{81\sqrt{3a^3}} \left( 2\frac{r^2}{a^2} - 18\frac{r}{a} + 27 \right) e^{-\frac{r}{3a}} \quad (506)$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6a^3}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \quad R_{31} = \frac{2\sqrt{2}}{81\sqrt{3a^3}} \left( -\frac{r^2}{a^2} + 6\frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{3a}} \quad (507)$$

$$R_{32} = \frac{2\sqrt{2}}{81\sqrt{15a^3}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}} \quad (508)$$

Durch Multiplikation mit den Kugelflächenfunktionen erhält man die Wellenfunktionen wasserstoffartiger Orbitale  $\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \phi)$  mit den Energieeigenwerten  $E_n$ :

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \phi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \phi) \quad \boxed{E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \cdot \frac{1}{n^2}} \quad (509)$$

## 18.4 Hermite-Polynome

Die Hermite-Differentialgleichung lautet:

$$H_n''(x) - 2x \cdot H_n'(x) + 2n \cdot H_n(x) = 0 \quad (510)$$

Hermite-Polynome lösen diese Differentialgleichung. Man erhält sie über folgende Formeln:

$$1) H_n(x) = n! \cdot \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m \cdot (2x)^{n-2m}}{m! \cdot (n-2m)!} \quad (511)$$

$$2) H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (512)$$

Die Hermite-Polynome bilden auf  $\mathbb{R}$  eine orthogonale Basis (für Funktion die langsamer als  $\sim e^{x^2}$  divergieren).

Sie sind folgendermaßen normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi} \cdot \delta_{nm} \quad (513)$$

Die ersten Hermite-Polynome lauten:

$$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (514)$$

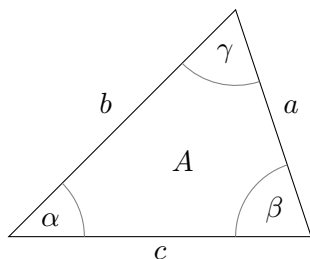
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \quad (515)$$

Entwicklung in Hermite-Polynome:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot H_n(x) \quad c_n = \frac{1}{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) H_n(x) \cdot e^{-x^2} \quad (516)$$

## 19 Geometrie im Dreieck

Folgende Abbildung zeigt ein handelsübliches Dreieck mit den Seitenlängen  $a, b, c$ , den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  und dem Flächeninhalt  $A$ :



Sind drei unabhängige Größen bekannt, können die Restlichen mit dem Sinus- und Kosinussatz berechnet werden:

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad (517)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \quad (518)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \quad (519)$$

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{abc}{2A} \quad (518)$$

## 20 Tensoren

Zu beachten ist die Einstein'sche Summenkonvention:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^d a_i \hat{e}_i = a_\alpha \hat{e}_\alpha \quad (520)$$

Wobei  $d$  die Dimension des Raums ist. In der Einstein'sche Summenkonvention wird die Summe  $\sum_{i=1}^d$  um Terme übersichtlicher darzustellen und Platz zu sparen nicht geschrieben. Eine Möglichkeit um nun klar zu Kennzeichnen über welche Indizes summiert wird und über welche nicht, besteht in der Konvention für Indizes über die summiert wird griechische und für Indizes, über die nicht summiert wird, deutsche Buchstaben zu verwenden. Der Ausdruck  $x = a_i b_\alpha$  in Einstein'scher Summenkonvention bedeutet somit ausgeschrieben  $x = \sum_{j=1}^d a_j b_j$ .

Für Matrizen gilt, dass  $M_{ij} = \mathbf{M} = \text{mat}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$  eine Matrix und (521)

$M_{\alpha\beta}$  eine Zahl, die Summe über alle Matrixelemente ist. (522)

### 20.1 Kronecker-Tensor

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (523)$$

Bei der Multiplikation von einem Kronecker mit einem anderen Tensor, kann man falls es mindestens einen gemeinsamen Index (über den summiert wird) gibt, diesen Index durch den anderen Index des Kroneckers ersetzen und im Anschluss das Kronecker streichen:

$$\delta_{\alpha\beta} a_\beta = a_\alpha \qquad \delta_{\alpha i} a_\alpha = a_i \qquad \text{Achtung: } \delta_{\alpha i} a_i \neq a_\alpha \quad (524)$$

### 20.2 Levi-Civita-Tensor

Voraussetzung ist das  $\hat{e}_n$  die Einheitsvektoren eines rechtsorientierten orthogonalen Koordinatensystems sind.

$$\varepsilon_{ijk} = \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) = \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j, \hat{e}_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312} \\ -1 & \text{für } \varepsilon_{213}, \varepsilon_{132}, \varepsilon_{321} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (525)$$

### 20.3 Rechenregeln

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{in} + \delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{il} \delta_{km} \delta_{jn} - \delta_{jl} \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{kl} \delta_{jm} \delta_{in} \quad (526)$$

$$\varepsilon_{ij\alpha} \varepsilon_{kl\alpha} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \quad (527)$$

$$\varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{j\alpha\beta} = 2 \cdot \delta_{ij} \quad (528)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6 \quad (529)$$



## 20.4 Operationen in Einstein'scher Summenkonvention

Reelles Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_\alpha b_\alpha$  (530)

Komplexes Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_\alpha^* b_\alpha$  (531)

Kreuzprodukt:  $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{e}_\alpha a_\beta b_\gamma$  (532)

Dyadisches Produkt:  $\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j = M_{ij} = \mathbf{M}$  (533)

Schurprodukt:  $\vec{a} \odot \vec{b} = a_\alpha b_\alpha \hat{e}_\alpha$  (534)

Determinante und Spatprodukt:  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$  (535)  
 $= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta c_\gamma = \det(\text{mat}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))$  (536)

Addition und Subtraktion von Matrizen:  $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = A_{ij} \pm B_{ij} = M_{ij} = \mathbf{M}$  (537)

Multiplikation (Matrix mit Vektor):  $\mathbf{A} \cdot \vec{b} = A_{\alpha\beta} b_\beta \hat{e}_\alpha = \vec{c}$  (538)

Multiplikation (Matrix mit Matrix):  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{i\alpha} B_{\alpha j} = M_{ij} = \mathbf{M}$  (539)

Transponieren:  $\mathbf{A}^\top = (A_{ij})^\top = A_{ji}$  (540)

Adjungieren ("Daggern"):  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{\top*} = (A_{ij})^\dagger = (A_{ji})^*$  (541)

Spur:  $\text{spur}(\mathbf{A}) = A_{\alpha\alpha}$  (542)

Matrixdivergenz:  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \partial_\alpha T_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta$  (543)

Matrix-Kreuzprodukt:  $\vec{a} \times \mathbf{A} = \varepsilon_{j\alpha\beta} a_\alpha A_{i\beta} = M_{ij} = \mathbf{M}$  (544)

## 20.5 Inverse Matrix

Für die Bestimmung einer inversen Matrix gibt es folgende explizite Formeln:

2x2-Matrix:  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  (545)

3x3-Matrix:  $\mathbf{M} = \text{mat}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mapsto \mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{mat}(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b})^\top}{\det(\mathbf{M})}$  (546)

## 20.6 Orthogonale Matrizen

Heißen in  $\mathbb{R}^n$  Drehmatrizen:

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^\top \Leftrightarrow D_{\alpha i} D_{\alpha j} = \delta_{ij}$$

$$\det(\mathbf{D}) = \begin{cases} 1 & \text{bei Drehung} \\ -1 & \text{bei Drehspiegelung} \end{cases}$$

$$(\mathbf{D}\vec{a}) \cdot (\mathbf{D}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$(\mathbf{D}\vec{a}) \times (\mathbf{D}\vec{b}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{D}(\vec{a} \times \vec{b})$$

Heißen in  $\mathbb{C}^n$  unitäre Matrizen:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \Leftrightarrow U_{\alpha i} (U_{\alpha j})^* = \delta_{ij} \quad (547)$$

$$\det(\mathbf{U}) = e^{i\varphi} \quad \text{mit: } \varphi \in [0, 2\pi) \quad (548)$$

$$(\mathbf{U}\vec{a}) \cdot (\mathbf{U}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (549)$$

$$(\mathbf{U}\vec{a}) \times (\mathbf{U}\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} \quad (550)$$

## 20.7 Rechenregeln zur Determinante

Folgende Regeln gelten für die Berechnung der Determinante von  $n \times n$ -Matrizen:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \quad \det(c \cdot \mathbf{A}) = c^n \cdot \det(\mathbf{A}) \quad (551)$$

$$\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A}) \quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \quad (552)$$

Satz des Königs:

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

## 21 Quantenmechanik

Normierte Wellenfunktion:  $|\Psi\rangle = \Psi(\vec{r}, t)$  (553)

Skalarprodukt:  $\langle\Phi|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n r \Phi^*(\vec{r}, t) \cdot \Psi(\vec{r}, t)$  (554)

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \quad (555)$$

$$\langle\Phi|a\Psi\rangle = a \cdot \langle\Phi|\Psi\rangle \quad \text{mit: } a \in \mathbb{C} \quad (556)$$

$$\langle a\Phi|\Psi\rangle = a^* \cdot \langle\Phi|\Psi\rangle \quad \text{mit: } a \in \mathbb{C} \quad (557)$$

Erwartungswert:  $\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n r \Psi^*(\vec{r}, t) \cdot \hat{A} \cdot \Psi(\vec{r}, t)$  (558)

Komplexe Konjugation:  $\langle\Phi|\hat{A}\Psi\rangle^* = \langle\hat{A}\Psi|\Phi\rangle$  (559)

Adjungierter Operator:  $\langle\hat{A}\Psi|\Phi\rangle = \langle\Psi|\hat{A}^\dagger\Phi\rangle \Leftrightarrow \langle\Psi|\hat{A}\Phi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\Psi|\Phi\rangle$  (560)

$\hat{A}^\dagger$  ist der adjungierte Operator zu  $\hat{A}$

Für Zahlen gilt:  $a^\dagger = a^*$  mit:  $a \in \mathbb{C}$  (561)

Linearität:  $\langle\Phi|a\Psi + b\Omega\rangle = a \langle\Phi|\Psi\rangle + b \langle\Phi|\Omega\rangle$  (562)

### 21.1 Operatoridentitäten

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1} \quad \hat{A}^{-1\dagger} = \hat{A}^{\dagger-1} \quad (563)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad \{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (564)$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \quad (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger \quad (565)$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \quad \{\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\} = \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \quad (566)$$

Falls  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ :

$$e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} \cdot e^{\hat{A}} = e^{\hat{A}+\hat{B}} \quad (567)$$

Falls  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$  aber  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] = 0$ :

$$e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} \cdot e^{\hat{A}} \cdot e^{[\hat{A}, \hat{B}]} \quad e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} \cdot e^{\hat{B}} \cdot e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2} \quad (568)$$

Falls  $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ :

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}] \cdot f'(\hat{B}) \quad (569)$$

### 21.2 Spezielle Operatoren

	Definition	Eigenwerte	Bemerkungen
Ortsoperator	$\hat{r} = \vec{r}$	reell	—
Impulsoperator	$\hat{p} = -i\hbar\nabla$	reell	—
Energieoperator	$\hat{E} = i\hbar\partial_t$	reell	—
Unitärer Operator	$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$	$e^{i\phi}$ mit $\phi \in [0, 2\pi)$	$\langle\hat{U}\Phi \hat{U}\Psi\rangle = \langle\Phi \Psi\rangle$
Zeitentwicklungsoperator	$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)}$	$e^{-\frac{iE}{\hbar}(t-t_0)}$	falls $\hat{H}$ zeitunabhängig
Paritätsoperator	$\hat{P}\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(-\vec{r}, t)$	1 oder -1	$\hat{P} = \hat{P}^{-1} = \hat{P}^\dagger$
Projektor	$\hat{\Lambda}_\Phi =  \Phi\rangle\langle\Phi $	0 oder 1	$w^* = \langle\Psi \Phi\rangle\langle\Phi \Psi\rangle$
Einheitsprojektor	$\mathbb{1} = \sum_n  \Phi_n\rangle\langle\Phi_n $	1	mit beliebiger Basis $ \Phi_n\rangle$

※  $w$  gibt die Wahrscheinlichkeit  $\Phi$  in  $\Psi$  zu finden an.

## 21.3 Harmonischer Oszillator

### 21.3.1 Eindimensional

Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (570)$$

Mit dem Hamiltonoperator ergibt sich folgende Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d}{dx^2} \Psi_n(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \cdot \Psi_n(x) = E_n \cdot \Psi_n(x) \quad (571)$$

Einführen von Erzeugungsoperator  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$  und Vernichtungsoperator  $\hat{\mathbf{a}}$

$$\hat{\mathbf{a}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{i\hat{\mathbf{p}}}{m\omega} \right) \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{\mathbf{a}}^\dagger + \hat{\mathbf{a}}) \quad (572)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{i\hat{\mathbf{p}}}{m\omega} \right) \quad \hat{\mathbf{p}} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}) \quad (573)$$

liefert

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \right) \quad (574)$$

mit dem Anzahloperator:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}} \quad (575)$$

Die Energieeigenwerte sind einfach bzw. nicht entartet und berechnen sich folgendermaßen:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit: } n \in \mathbb{N}_0 \quad (576)$$

Die dazugehörigen Eigenzustände sind:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{\mathbf{a}}^\dagger)^n |0\rangle \quad (577)$$

Man erhält die Wellenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators im Ortsraum über folgende Relation aus den Hermite-Polynomen:

$$|n\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} \cdot H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x \right) \cdot e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (578)$$

Da es sich bei der Hermite-Differentialgleichung um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, gibt es zu jedem Polynom noch eine weitere linear unabhängige Lösung, proportional zu  $H_{-(n+1)}(\sqrt{m\omega/\hbar} \cdot ix) \cdot \exp(m\omega x^2/(2\hbar))$ . Diese erhält man über die Konstruktionsformel 2) (Gleichung (512)) für negative  $n$ . Diese Lösungen sind keine Polynome mehr und führen zu einer Divergenz der Wellenfunktionen  $\Psi_n(x)$  für  $x = \pm\infty$ . Sie stellen somit keine Lösung des harmonischen Oszillators dar, da sie die Randbedingung  $\Psi_n(x = \pm\infty) = 0$  nicht erfüllen.

Operatorwirkung auf die Eigenzustände:

$$\hat{\mathbf{a}} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad \hat{\mathbf{a}}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{\mathbf{n}} |n\rangle = n |n\rangle \quad (579)$$

### 21.3.2 Mehrdimensional

Im  $N$ -dimensionalen ergeben sich folgende Energieeigenwerte:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{N}{2} \right) \quad (580)$$

Diese sind  $g_n$ -fach entartet mit:

$$g_n = \binom{N+n-1}{n} \quad (581)$$

### 21.4 Bahndrehimpulsoperator

Definition:

$$\hat{\mathbf{L}} = \vec{r} \times \hat{\mathbf{p}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{L}_i = \varepsilon_{i\alpha\beta} r_\alpha \hat{p}_\beta \quad (582)$$

Bahndrehimpulsoperator im Ortsraum:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hbar\hat{\mathbf{J}} = -i\hbar\hat{e}_\phi\partial_\vartheta + \frac{i\hbar}{\sin(\vartheta)}\hat{e}_\vartheta\partial_\phi \quad (583)$$

Verwandte Operatoren:

$$\hat{\mathbf{L}}^2\text{-Operator:} \quad \hat{\mathbf{L}}^2 = \hbar^2\hat{\mathbf{J}}^2 = -\frac{\hbar^2}{\sin(\vartheta)}\partial_\vartheta \sin(\vartheta)\partial_\vartheta - \frac{\hbar^2}{\sin(\vartheta)^2}\partial_\phi^2 \quad (584)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_\pm\text{-Leiteroperatoren:} \quad \hat{\mathbf{L}}_\pm = \hat{\mathbf{L}}_x \pm i\hat{\mathbf{L}}_y \Rightarrow \hat{\mathbf{L}}_\pm^\dagger = \hat{\mathbf{L}}_\mp \quad \begin{aligned} \hat{L}_x &= \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_+ + \hat{\mathbf{L}}_-) \\ \hat{L}_y &= \frac{1}{2i}(\hat{\mathbf{L}}_+ - \hat{\mathbf{L}}_-) \end{aligned} \quad (585)$$

An dieser Stelle sei erwähnt, dass  $\hat{\mathbf{L}}^2$  und ein beliebiger  $\hat{\mathbf{L}}_j$  eine gemeinsame Eigenbasis besitzen da  $[\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$  ist.

Operatorwirkung auf die Eigenzustände:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \quad \hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle \quad (586)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_\pm |l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (587)$$

### 21.5 Wichtige Kommutatoren

$$[r_j, r_k] = 0 \quad [r_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk} \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad (588)$$

$$[r^2, \hat{p}_j] = 2i\hbar r_j \quad [r_j, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}_j \quad [r^2, \hat{p}^2] = 4i\hbar\vec{r}\hat{\mathbf{p}} + 6\hbar^2 \quad (589)$$

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger] = 1 \quad [\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger] = \hat{\mathbf{a}}^\dagger \quad [\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{a}}] = -\hat{\mathbf{a}} \quad (590)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}_j, r_k] = i\hbar\varepsilon_{jk\alpha}r_\alpha \quad [\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\varepsilon_{jk\alpha}\hat{p}_\alpha \quad [\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{L}}_k] = i\hbar\varepsilon_{jk\alpha}\hat{\mathbf{L}}_\alpha \quad (591)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}_j, r^2] = 0 \quad [\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{p}^2] = 0 \quad [\hat{\mathbf{L}}_j, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0 \quad (592)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}_\pm, \hat{\mathbf{L}}_\mp] = \pm 2\hbar\hat{\mathbf{L}}_z \quad [\hat{\mathbf{L}}_z, \hat{\mathbf{L}}_\pm^k] = \pm k\hbar\hat{\mathbf{L}}_\pm^k \quad [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}_\pm] = 0 \quad (593)$$

### 21.6 Basiszerlegung

Die Zerlegung einer Wellenfunktion  $|\Psi\rangle$  in eine beliebige Basis  $|\Phi_n\rangle$  kann durch Einfügen des Einheitsprojektors der entsprechenden Basis durchgeführt werden.

$$|\Psi\rangle = \mathbb{1}|\Psi\rangle = \sum_n |\Phi_n\rangle \langle\Phi_n|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\Phi_n\rangle \quad \text{mit: } c_n = \langle\Phi_n|\Psi\rangle \quad (594)$$

Da  $|\Phi_n\rangle$  eine Basis ist gilt:

$$\langle\Phi_n|\Phi_m\rangle = \delta_{nm} \quad (595)$$